Pág. 383, autoevaluación 1, 2 y 3

$1)\ f(x) = x^3 + 3x^2$

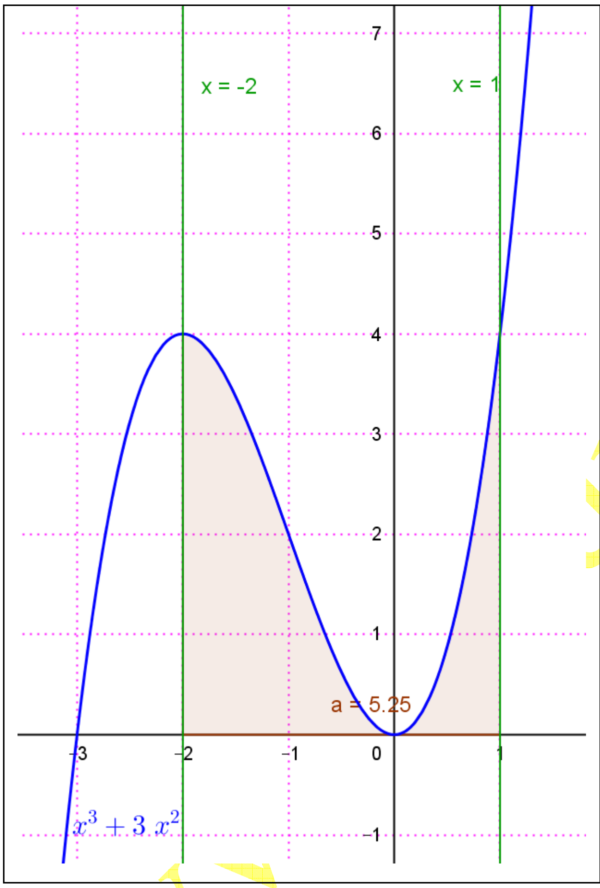
$a)$ *área encerrada por* $f(x)$, *eje* X, $x = -2$ *y* $x = 1$

Representar la función: $x = 0,\ y = 0$

$$y = 0,\ x^3 + 3x^2 = 0;\quad x^2(x+3) = 0 \left\langle \begin{array}{l} x^2 = 0 \quad x = 0 \\ x + 3 = 0; \quad x = -3 \end{array} \right.$$

Puntos de corte: (0,0) punto doble y (-3, 0)

Obtengamos otro punto: $x = -1$, $y = (-1)^3 + 3(-1)^2 = 2$; $(-1, 2)$



Como las dos áreas quedan por encima del eje OX, realizamos el cálculo mediante una integral,

$$\int_{-2}^{1} \left(x^3 + 3x^2\right)dx = \left[\frac{x^4}{4} + 3\frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{1} = \left[\frac{x^4}{4} + x^3\right]_{-2}^{1} =$$

$$= \left(\frac{1^4}{4} + 1^3\right) - \left(\frac{(-2)^4}{4} + (-2)^3\right) = \frac{5}{4} - (-4) = \frac{21}{4} = 5'25$$

El área pedida mide 5´25 u^2.

b) El área de cada uno de los recintos comprendidos entre las gráficas de f(x) e g(x) = x + 3

$$x^3 + 3x^2 = x + 3;\quad x^3 + 3x^2 - x - 3 = 0$$

$$Soluciones: x = -3,\ x = -1,\ x = 1$$

	1	3	-1	-3
1		1	4	-3
	1	4	3	0
-1		-1	-3	
	1	3	0	
-3		-3		
	1	0		

$$\int_{-3}^{-1}\left(x^3+3x^2-x-3\right)dx=\left[\frac{x^4}{4}+3\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-3x\right]_{-3}^{-1}=\left[\frac{x^4}{4}+x^3-\frac{x^2}{2}-3x\right]_{-3}^{-1}=$$

$$=\left(\frac{(-1)^4}{4}+(-1)^3-\frac{(-1)^2}{2}-3(-1)\right)-\left(\frac{(-3)^4}{4}+(-3)^3-\frac{(-3)^2}{2}-3(-3)\right)=\frac{7}{4}-\frac{-9}{4}=4$$

$$\int_{-1}^{1}\left(x^3+3x^2-x-3\right)dx=\left[\frac{x^4}{4}+3\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-3x\right]_{-1}^{1}=\left[\frac{x^4}{4}+x^3-\frac{x^2}{2}-3x\right]_{-1}^{1}=$$

$$=\left(\frac{(1)^4}{4}+(1)^3-\frac{(1)^2}{2}-3(1)\right)-\left(\frac{(-1)^4}{4}+(-1)^3-\frac{(-1)^2}{2}-3(-1)\right)=\frac{-9}{4}-\frac{7}{4}=-4$$

El área de los dos recintos es de 4 u^2.

2) Área limitada por: f(x) = x^2 – 2 x + 2, eje Y y la recta tangente a f en x = 3.

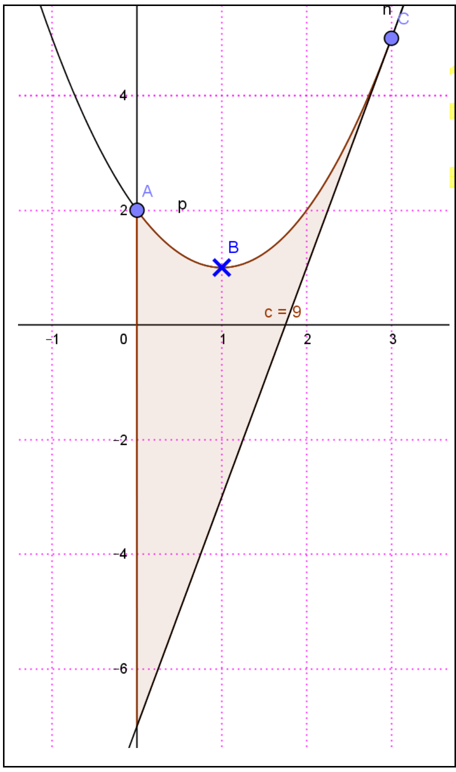
$$\begin{cases} punto, \quad x=3,\ y=3^2-2\cdot 3+2=5 \quad (3{,}5) \\ pendiente, \quad m=f'(3);\quad f'(x)=2x-2 \quad \rightarrow \quad m=2\cdot 3-2=4 \end{cases} \qquad r.t.:\quad y-5=4(x-3);\quad y=4x-7$$

Corte entre $y=x^2-2x+2$ *e* $y=4x-7$

$$x^2-2x+2=4x-7;\quad x^2-2x+2-4x+7=0;\quad x^2-6x+9=0 \qquad x=\frac{6\pm\sqrt{(-6)^2-4\cdot 1\cdot 9}}{2\cdot 1}=3$$

x	x^2-2x+2
0	2
1	1
3	5

x	$4x-7$
0	−7
1	−3
3	5



$$\int_0^3(par-rec)dx=\int_0^3\left(x^2-6x+9\right)dx=\left[\frac{x^3}{3}-6\frac{x^2}{2}+9x\right]_0^3=$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}-3x^2+9x\right]_0^3=\left(\frac{3^3}{3}-3\cdot 3^2+9\cdot 3\right)-\left(\frac{0^3}{3}-3\cdot 0^2+9\cdot 0\right)=9-0=9$$

El área pedida es de 9 u^2.

3)

$$\int_0^2 |2x-1|dx = (*)$$

$$y=|2x-1|=\begin{cases}2x-1 & ,2x-1>0\\ -2x+1, & 2x-1\le 0\end{cases}=\begin{cases}2x-1 & ,2x>1\\ -2x+1, & 2x\le 1\end{cases}=\begin{cases}2x-1 & ,x>\dfrac{1}{2}\\ -2x+1, & x\le\dfrac{1}{2}\end{cases}=$$

$$=\begin{cases}-2x+1, & x\le\dfrac{1}{2}\\ 2x-1 & ,x>\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

$$(*)=\int_0^{\frac{1}{2}}(-2x+1)dx+\int_{\frac{1}{2}}^2(2x-1)dx=\left[-x^2+x\right]_0^{\frac{1}{2}}+\left[x^2-x\right]_{\frac{1}{2}}^2=$$

$$=\left(-\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\right)-\left(-0^2+0\right)+\left((2)^2-2\right)-\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}+2-\frac{-1}{4}=\frac{5}{2}=2´5$$

$$\int_0^2 |2x-1|dx = 2´5$$