Pag 311 . 1 b

$$y = \frac{x^2-9}{x^2-4}$$

a) Dom $y = \mathbb{R} \sim \{-2, 2\}$

$$x^2-4=0 \rightarrow x^2=4 \rightarrow x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$$

b) Puntos de corte con ejes $(0, \frac{9}{4})$, $(-3, 0)$ y $(3, 0)$

$$x=0 \rightarrow y = \frac{0^2-9}{0^2-4} = \frac{9}{4}$$

$$y=0 \rightarrow \frac{x^2-9}{x^2-4} = 0 \rightarrow x^2-9=0 \rightarrow x^2=9 \rightarrow x=\pm\sqrt{9}=\pm 3$$

c) Asíntotas

A. Vertical

$x=-2$

$$\lim_{x\to -2} \frac{x^2-9}{x^2-4} = \frac{4-9}{4-4} = \frac{-5}{0} = \infty \rightarrow x=-2 \text{ es a. V.}$$

Posición de curva respecto de asíntota

$$\lim_{x\to -2^-} \frac{x^2-9}{x^2-4} \overset{x=-2'1}{=} \frac{-}{+}\infty = -\infty \Big/ \lim_{x\to -2^+} \frac{x^2-9}{x^2-4} \overset{x=-1'9}{=} \frac{-}{-}\infty = +\infty$$

$x=-2$

$x=2$

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-9}{x^2-4} = \frac{-5}{0} = \infty \rightarrow x=2 \text{ es a.v.}$$

Posición

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{x^2-9}{x^2-4} \overset{x=1'9}{=} \frac{-}{-}\infty = +\infty \Big/ \lim_{x\to 2^+} \frac{x^2-9}{x^2-4} \overset{x=2'1}{=} \frac{-}{+}\infty = -\infty$$

$x=2$

A. Horizontal

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{x^2-9}{x^2-4} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2}{x^2} = \lim_{x\to -\infty} 1 = 1$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2-9}{x^2-4} = \ldots\ldots\ldots = 1$$

$\Big\}$ $y=1$ es a. h.

Posición curva respecto de asíntota

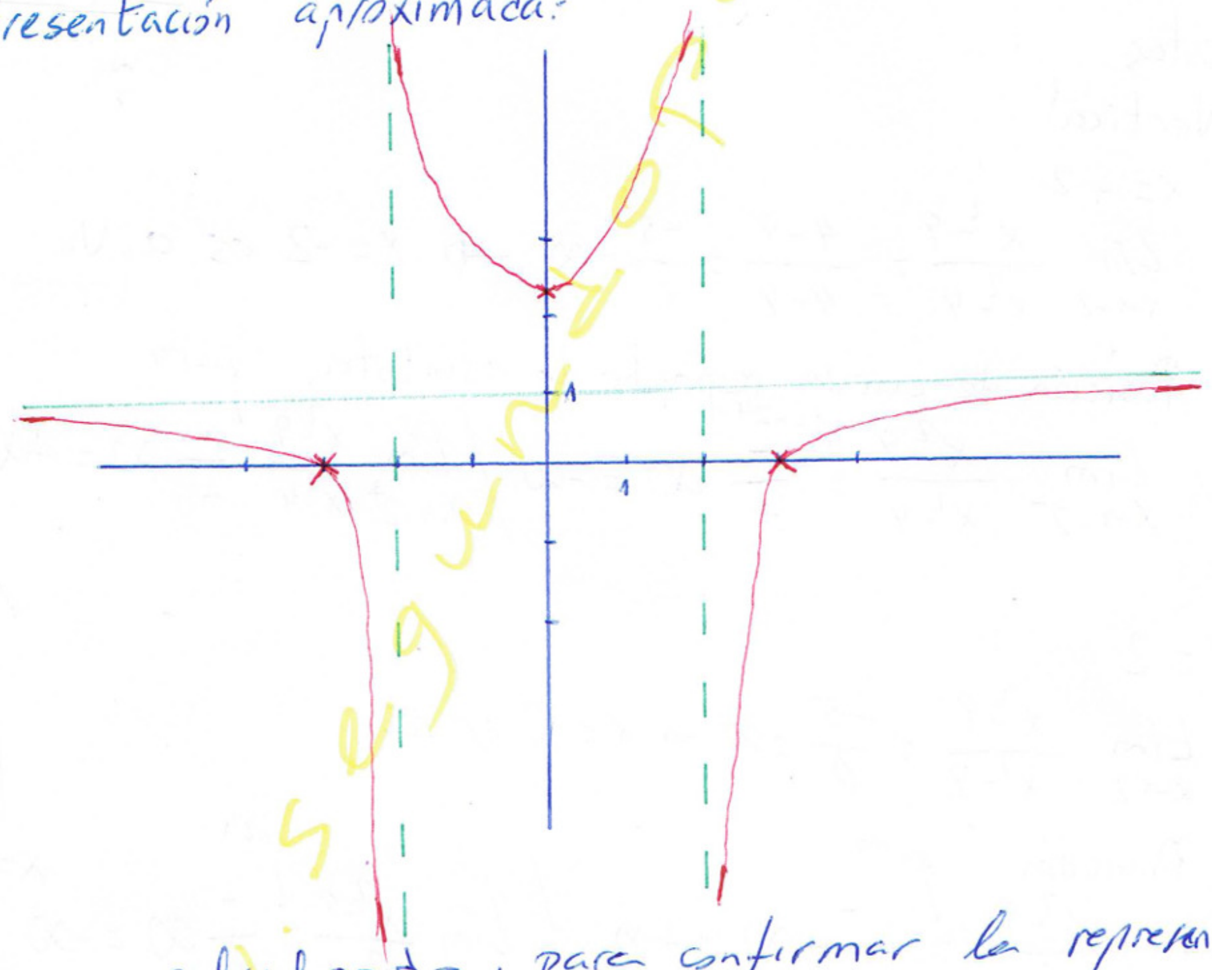
x	curva	asint
$-\infty$, -1000	$\frac{(-1000)^2-9}{(-1000)^2-4} = 0'999..$	1
$+\infty$, 1000	$\frac{1000^2-9}{1000^2-4} = 0'999..$	1

$\rightarrow$

A. Oblicua.

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x^2-9}{x^2-4}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-9}{x^3-4x} = 0 \rightarrow \text{No hay a.O.}$$

Representación aproximada:



Sigamos calculando, para confirmar la representación.

d) $$y' = \frac{2x(x^2-4)-(x^2-9).2x}{(x^2-4)^2} = \frac{2x^3-8x-2x^3+9x}{(x^2-4)^2} = \frac{x}{(x^2-4)^2}$$

$$y'' = \frac{1.(x^2-4)^2 - x.2.(x^2-4).2x}{((x^2-4)^2)^2} = \frac{(x^2-4)-4x^2}{(x^2-4)^3} = \frac{-3x^2-4}{(x^2-4)^3}$$

e) Monotonía

Signo de y'

$x = 0$

$(x^2-4)^2 = 0 \rightarrow x^2-4=0 \rightarrow x = \pm 2 \notin \text{Dom } y$

$$\begin{array}{ccccccc} - & & - & & + & & + \\ \hline & -2 & & 0 & & 2 & \\ & & & \text{Mín} & & & \end{array}$$

y' es un cociente cuyo denominador está al cuadrado (positivo). El signo de y' depende del numerador (que es x)

y es creciente en $(0,2) \cup (2,+\infty)$ y decreciente en $(-\infty,-2) \cup (0,2)$

En $\left(0, \frac{9}{4}\right)$ hay un mínimo.

f) Curvatura

Signo de y''

$-3x^2-4=0 \rightarrow 3x^2=-4$ Sin sol

$(x^2-4)^3=0 \rightarrow x^2-4=0 \rightarrow x = \pm 2 \notin \text{Dom } y$

$$\begin{array}{ccccc} - & & + & & - \\ \hline & -2 & & 2 & \end{array}$$

No hay puntos de inflexión

Determinamos el signo de y'' con tabla de valores (no hay "expresión" que sea positiva o negativa claramente)

x	y'' (sólo signo)
-3	$\frac{-3(-3)^2-4}{((-3)^2-4)^3} = -$
0	$\frac{-3 \cdot 0^2-4}{(0-4)^3} = +$
3	$\frac{-3 \cdot 3^2-4}{(3^2-4)^3} = -$

Cóncava $(-2,2)$ $\cup$

Convexa $(-\infty,-2) \cup (2,+\infty)$ $\cap$

La representación aproximada cumple las condiciones obtenidas sobre monotonía y curvatura.