27) ¿c? / $y = \dfrac{e^x}{x^2+c}$ tenga un único punto crítico

Puntos críticos: aquellos en los que $y' = 0$.

$$y' = \frac{e^x(x^2+c) - e^x \cdot 2x}{(x^2+c)^2} = \frac{e^x(x^2-2x+c)}{(x^2+c)^2}$$

$\dfrac{e^x(x^2-2x+c)}{(x^2+c)^2} = 0$ debe tener una única solución.

$$e^x(x^2-2x+c) = 0 \begin{cases} e^x = 0 & \text{sin solución} \\ x^2-2x+c = 0 & \text{esta ecuación} \end{cases}$$

de 2º grado tendrá una única solución cuando

$b^2 - 4ac = 0 \to (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot c = 0 \to 4 - 4c = 0 \to 4 = 4c \to$

$\to c = 1$

Para que la función tenga un único punto crítico $\underline{c=1}$

Veamos que tipo de punto crítico es:

resolvemos $x^2-2x+1 = 0 \to (x-1)^2 = 0 \to x-1 = 0 \to x = 1$.

Es la única solución que sale de y'. Veamos el signo de y'

$$\begin{array}{ccc} + & 1 & + \\ \hline \end{array}$$

x	$y' = \dfrac{e^x(x^2-2x+1)}{(x^2+1)^2}$
0	$1 \cdot e > 0$
2	$\dfrac{e \cdot (2^2-2\cdot 2+1)}{(2^2+1)^2} = \dfrac{e}{25} > 0$

En $x=1$ no hay ni máximo ni mínimo.

Para ver si es punto de inflexión hay que calcular y'' (complicada) y sale que es punto de inflexión. $y'' = \dfrac{e^x[x^4-4x^3+8x^2-4x-1]}{(x^2+1)^3}$.

28) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-x}{e^x}, & x<0 \\ x^2+ax+b, & x \geq 0 \end{cases}$

a) ¿a, b? / f(x) sea derivable

Si f(x) es derivable $\rightarrow$ f(x) es continua.

$\dfrac{1-x}{e^x}$ | x^2+ax+c

0

polinomio
cont. y derivable

Es un cociente, pero como el denominador es e^x (y $e^x \neq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$) y el numerador es polinomio $\rightarrow$ en este trozo la función es continua y derivable.

Debemos comprobar si es continua y derivable en el cambio de definición, es decir, para $x=0$

¿Continua en $x=0$?

1) $f(0) = 0^2 + a\cdot 0 + b = b$

2) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1-x}{e^x} = \dfrac{1-0}{e^0} = 1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} (x^2+ax+b) = b \end{cases} \Rightarrow$ Para que sea cont en $x=0 \rightarrow b=1$

¿Derivable en $x=0$? (Ya sabemos que $b=1$)

$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-x}{e^x}, & x<0 \\ x^2+ax+1, & x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-1\cdot e^x - (1-x)\,e^x}{(e^x)^2}, & x<0 \\ 2x+a, & x>0 \end{cases}$

$f'(0) = \begin{cases} f'(0^-) = \dfrac{-1-1\cdot 1}{1^2} = -2 \\ f'(0^+) = a \end{cases} \Rightarrow a = -2$

Para que f(x) sea derivable debe ser $\begin{cases} a=-2 \\ b=1 \end{cases}$.