31) Puntos de la circunferencia $(x-3)^2+(y+2)^2=16$ en los que la recta tangente a ella es paralela a la bisectriz del primer cuadrante.

La bisectriz del primer cuadrante es $y = x$, su pendiente es 1.

La pendiente de la r.t. sale de la derivada, derivemos la circunferencia

$2(x-3)+2(y+2)y'=0$

$$2(y+2)y'=-2(x-3) \quad \rightarrow \quad y'=\frac{-2(x-3)}{2(y+2)}=\frac{-(x-3)}{(y+2)}=\frac{-x+3}{y+2}$$

$$y'=1$$

Por tanto debe ser: $\dfrac{-x+3}{y+2}=1 \quad \rightarrow \quad -x+3=y+2$

Sustituyendo el valor de $y+2$ en la ecuación de la circunferencia

$(x-3)^2+(-x+3)^2=16$

$(x-3)^2+(-x+3)^2=16$ y resolvemos

$$x^2-6x+9+x^2-6x+9=16$$

$$2x^2-12x+18=16$$

$$2x^2-12x+2=0 \quad \rightarrow \quad x^2-6x+1=0 \quad \rightarrow \quad x=\frac{6\pm\sqrt{(-6)^2-4.1.1}}{2.1}=\frac{6\pm4\sqrt{2}}{2}=3\pm2\sqrt{2}=\begin{cases} x_1=3+2\sqrt{2} \\ x_2=3-2\sqrt{2}\end{cases}$$

$$Para \quad x=3+2\sqrt{2} \quad (sustituyendo\ en\ (*))$$

$$-\left(3+2\sqrt{2}\right)+3=y+2 \quad \rightarrow \quad -3-2\sqrt{2}+3=y+2 \quad \rightarrow \quad -2\sqrt{2}=y+2 \quad \rightarrow \quad y=-2-2\sqrt{2}$$

$$la\ r.t.\ será \quad \left(y-\left(-2-2\sqrt{2}\right)\right)=1\left(x-\left(3+2\sqrt{2}\right)\right) \quad \rightarrow \quad y+2+2\sqrt{2}=x-3-2\sqrt{2} \quad \rightarrow \quad y=x-5-4\sqrt{2}$$

$$Para \quad x=3-2\sqrt{2} \quad (sustituyendo\ en\ (*))$$

$$-\left(3-2\sqrt{2}\right)+3=y+2 \quad \rightarrow \quad -3+2\sqrt{2}+3=y+2 \quad \rightarrow \quad 2\sqrt{2}=y+2 \quad \rightarrow \quad y=-2+2\sqrt{2}$$

$$la\ r.t.\ será \quad \left(y-\left(-2+2\sqrt{2}\right)\right)=1\left(x-\left(3-2\sqrt{2}\right)\right) \quad \rightarrow \quad y+2-2\sqrt{2}=x-3+2\sqrt{2} \quad \rightarrow \quad y=x-5+4\sqrt{2}$$

41/ $f(x) = \begin{cases} ax^2+bx+c & , x \leq 0 \\ x\ln x & , x>0 \end{cases}$

(a)

$y = x\ln x$

$y' = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} =$

$= \ln x + 1$

- ¿a, b, c? / $f(x)$ sea continua

ax^2+bx+c	$x\ln x$
polinomio continuo	Para $x>0$ $\exists \ln x \rightarrow x \cdot \ln x$ es continua.

(La línea que separa las dos columnas está marcada con 0.)

El problema está en $x=0$

1) $f(0) = c$

2) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^-} (ax^2+bx+c) = c \\ \lim\limits_{x \to 0^+} x\ln x = (0 \cdot \infty) = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{1/x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{\text{L'Hôp}}{=} \end{cases}$

$= \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim\limits_{x \to 0^+} (-x) = 0$

Por lo tanto $\underline{\underline{c=0}}$

Para los dos siguientes condiciones necesitamos la derivada

$f'(x) = \begin{cases} 2ax+b & x \leq 0 \\ \ln x + 1 & , x>0 \quad (\text{ver (a)}) \end{cases}$

- Tenga un máximo en $x=-1 \Rightarrow f'(-1) = 0$

Luego $\{$ para $x=-1$, $f'(x) = 2ax+b$ $\} \rightarrow 2a(-1)+b=0 \rightarrow -2a+b=0$

- La r.t. en $x=-2$ sea paralela a $y=2x \rightarrow m=2$

La pendiente de la r.t en $x=-2$ debe ser 2

$f'(-2) = 2$

como antes $2a(-2)+b=2 \rightarrow -4a+b=2$

Resolvamos $\begin{cases} -2a+b=0 \\ -4a+b=2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2a-b=0 \\ -4a+b=2 \end{cases}$

$-2a = 2 \rightarrow a=-1$

Solución
$a=-1$
$b=-2$
$c=0$

En 1ª $\rightarrow -2 \cdot (-1)+b=0 \rightarrow 2+b=0 \rightarrow b=2$