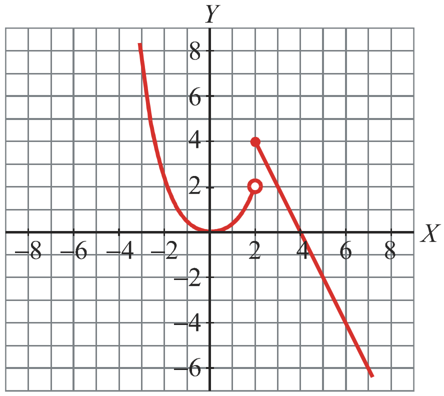
Ejercicio nº 1.-

Dada la siguiente gráfica de *f(x),* calcula los límites que se indican:



a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

c) $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$

d) $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$

e) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

Solución:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

c) $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 2$

d) $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 4$

e) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$

Ejercicio nº 2.-

Representa en cada caso los siguientes resultados:

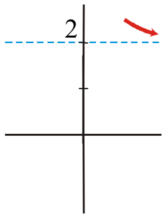
a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$

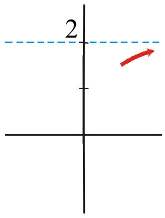
b) $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$

Solución:

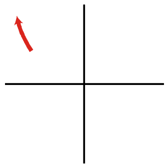
a)

o bien





b)



Ejercicio nº 3.-

Calcula los siguientes límites:

a) $\displaystyle \lim_{x \to 3} \frac{4}{x^2+2x+3}$

b) $\displaystyle \lim_{x \to 3} \sqrt{x^2-9}$

c) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \cos x$

Solución:

a) $\displaystyle \lim_{x \to 3} \frac{4}{x^2+2x+3} = \frac{4}{9+6+3} = \frac{4}{18} = \frac{2}{9}$

b) $\displaystyle \lim_{x \to 3} \sqrt{x^2-9} = \sqrt{9-9} = \sqrt{0} = 0$

c) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \cos x = \cos 0 = 1$

Ejercicio nº 4.-

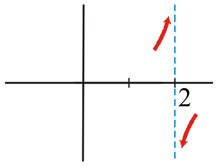
Dada la función $\displaystyle f(x) = \frac{x+1}{x^2-5x+6}$, **calcula el límite de** $f(x)$ **en** $x = 2$. **Representa la información que obtengas.**

Solución:

$$\frac{x+1}{x^2-5x+6} = \frac{x+1}{(x-2)(x-3)}$$

Calculamos los límites laterales:

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{x+1}{(x-2)(x-3)} = +\infty \qquad \lim_{x \to 2^+} \frac{x+1}{x^2-5x+6} = -\infty$$



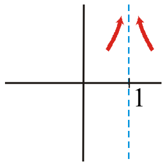
Ejercicio nº 5.-

Halla el límite siguiente y representa la información obtenida:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + 4x - 5}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}$$

Solución:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + 4x - 5}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+5)}{(x-1)^3} = \lim_{x \to 1} \frac{(x+5)}{(x-1)^2} = +\infty$$



Ejercicio nº 6.-

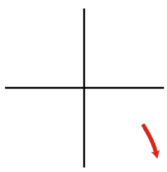
Halla el límite cuando $x \to +\infty$ de las siguientes funciones y representa gráficamente la información que obtengas:

a) $f(x) = \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^3}{2} + 1$

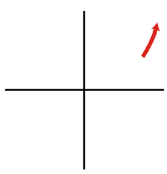
b) $f(x) = \dfrac{-3x^2 + 2x^3}{5}$

Solución:

a) $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x}{2} - \frac{x^3}{2} + 1 \right) = -\infty$



b) $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \frac{-3x^2 + 2x^3}{5} = +\infty$



Ejercicio nº 7.-

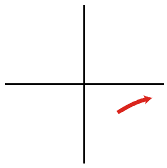
Halla los siguientes límites y representa gráficamente los resultados que obtengas:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^2+1}{(2-x)^3}$

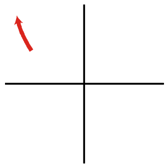
b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2-x^3}{x^2-1}$

Solución:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^2+1}{(2-x)^3} = 0$

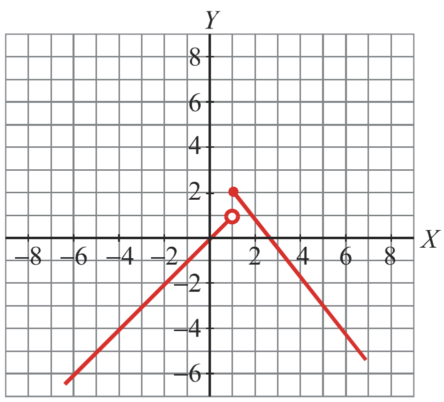


b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2-x^3}{x^2-1} = +\infty$



Ejercicio nº 8.-

La siguiente gráfica corresponde a la función $f(x)$:



Di si es continua o no en $x=1$ y en $x=2$. Si en alguno de los puntos no es continua, indica cuál es la causa de la discontinuidad.

Solución:

- En $x=1$ no es continua porque presenta un salto en ese punto. Observamos que $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$.

- En $x=2$ sí es continua.

Ejercicio nº 9.-

Estudia la continuidad de:

$$\boldsymbol{f(x)=\begin{cases} x^2-2x & \text{si} \quad x\le 1 \\ 3x-1 & \text{si} \quad x>1 \end{cases}}$$

Solución:

- Si $x \neq 1$, la función es continua.
- Si $x = 1$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(x^2-2x\right)=-1 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(3x-1)=2 \end{array}\right\}$$

No es continua en $x=1$ porque $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$. Es decir, no tiene límite en ese punto.

Ejercicio nº 10.-

Averigua las asíntotas verticales de la siguiente función y sitúa la curva respecto a ellas:

$$\boldsymbol{f(x)=\frac{x+3}{x^2-x-2}}$$

Solución:

- $x^2-x-2=0 \to x=\dfrac{1\pm\sqrt{1+8}}{2} \begin{cases} x=-1 \\ x=2 \end{cases}$

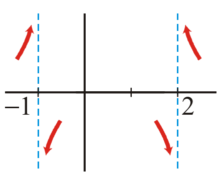
Las asíntotas verticales son $x=-1$ y $x=2$.

- Posición de la curva respecto a las asíntotas:

$$\frac{x+3}{x^2-x-2}=\frac{x+3}{(x+1)(x-2)}$$

$$\lim_{x\to -1^-}\frac{x+3}{x^2-x-2}=+\infty \qquad \lim_{x\to -1^+}\frac{x+3}{x^2-x-2}=-\infty$$

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{x+3}{x^2-x-2}=-\infty \qquad \lim_{x\to 2^+}\frac{x+3}{x^2-x-2}=+\infty$$



Ejercicio nº 11.-

Sea la función:

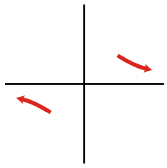
$$f(x)=\frac{1+x^2}{x^3}$$

Estudia y representa su comportamiento cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$.

Solución:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1+x^2}{x^3}=0$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1+x^2}{x^3}=0$$



Ejercicio nº 12.-

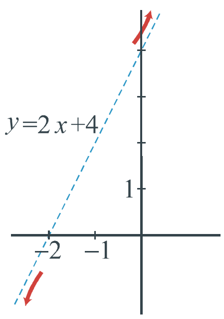
Dada la función:

$$f(x)=\frac{2x^2+1}{x-2}$$

halla su asíntota oblicua y representa la posición de la curva respecto a ella.

Solución:

- $\dfrac{2x^2+1}{x-2}=2x+4+\dfrac{9}{x-2} \to$ Asíntota oblicua: $y=2x+4$
- Cuando $x\to+\infty$, $\dfrac{9}{x-2}>0 \quad \to \quad$ La curva está por encima de la asíntota.
- Cuando $x\to-\infty$, $\dfrac{9}{x-2}<0 \quad \to \quad$ La curva está por debajo de la asíntota.
- Representación:



Ejercicio nº 13.-

Los gastos mensuales de una familia en alimentación y ropa dependen de sus ingresos x. Así:

$$f(x)=\begin{cases}0{,}5x+k & \text{si } 0\le x\le 1200\\ \dfrac{1000x}{x+300} & \text{si } x>1200\end{cases}$$

con x y $f(x)$ dados en euros.

a) Calcula el valor de k para que los gastos sean continuos.

b) Calcula el límite de $f(x)$ cuando $x \to +\infty$ y explica su significado.

Solución:

a) Para que los gastos sean continuos, $f(x)$ ha de ser continua en $x = 1\,200$, puesto que para el resto de valores tenemos asegurada la continuidad:

$y = 0{,}5x + k$ es una función lineal $\rightarrow$ continua en el dominio dado $0 \le x = 1\,200$.

$y = \dfrac{1000x}{x+300}$ es una función de proporcionalidad inversa, continua en el dominio dado $x > 1200$.

Imponemos la continuidad en $x = 1\,200$ para calcular k:

$$\left.\begin{array}{l} f(1200) = 0{,}5+1200+k = 600+k \\ \lim\limits_{x\to 1\,200^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1\,200} f\,(0{,}5x+k) = 600+k \\ \lim\limits_{x\to 1\,200^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1\,200} \dfrac{1000x}{x+300} = 800 \end{array}\right\} \rightarrow \lim\limits_{x\to 1\,200^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1\,200^+} f(x) \rightarrow 600+k = 800 \rightarrow k = 200$$

b) $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1000x}{x+300} = 1000$$

Los gastos mensuales de una familia, por muchos ingresos que tenga, son como máximo 1 000 euros.