Ejercicio nº 1.-

Determina los puntos de tangente horizontal de la función:

$$f(x)=\frac{x^3}{x+2}$$

Solución:

- $f'(x)=\dfrac{3x^2(x+2)-x^3}{(x+2)^2}=\dfrac{3x^3+6x^2-x^3}{(x+2)^2}=\dfrac{2x^3+6x^2}{(x+2)^2}$

- $f'(x)=0 \;\rightarrow\; 2x^3+6x^2=0 \;\rightarrow\; x^2(2x+6)=0 \begin{cases} x=0 \;\rightarrow\; f(0)=0 \;\rightarrow\; \text{Punto } (0,0) \\ x=-3 \;\rightarrow\; f(-3)=27 \;\rightarrow\; \text{Punto } (-3, 27) \end{cases}$

Ejercicio nº 2.-

Estudia dónde crece y dónde decrece la función:

$$f(x)=3+12x-3x^2$$

Solución:

- $f'(x)=12-6x$

- Estudiamos el signo de la derivada:

$$\begin{array}{lllllll} 12-6x=0 & \rightarrow & x=2 & & & & \\ 12-6x>0 & \rightarrow & 12>6x & \rightarrow & 6x<12 & \rightarrow & x<2 \\ 12-6x<0 & \rightarrow & 12<6x & \rightarrow & 6x>12 & \rightarrow & x>2 \end{array}$$

- La función es creciente en $(-\infty, 2)$, decreciente en $(2 +\infty)$, y tiene un máximo en $x=2$.

Ejercicio nº 3.-

Halla y representa gráficamente los máximos y mínimos de la función:

$$y = x^3-3x^2-9x+1$$

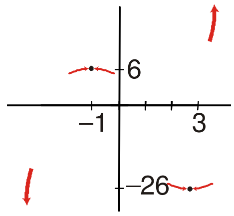
Solución:

- $y'=3x^2-6x-9=3\left(x^2-2x-3\right)=0 \;\rightarrow\; x=\dfrac{2\pm\sqrt{4+12}}{2}=$

$$=\frac{2\pm 4}{2}\begin{cases} x=3 \;\rightarrow\; f(3)=-26 \;\rightarrow\; \text{Punto } (3,-26) \\ x=-1 \;\rightarrow\; f(-1)=6 \;\rightarrow\; \text{Punto } (-1, 6) \end{cases}$$

- Hallamos las ramas infinitas para saber si son máximos o mínimos:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x^3-3x^2-9x+1\right)=+\infty \qquad \lim_{x\to-\infty}\left(x^3-3x^2-9x+1\right)=-\infty$$



Máximo en $(-1, 6)$ y mínimo en $(3, -26)$.

Ejercicio nº 4.-
Estudia el crecimiento y el decrecimiento de la siguiente función:

$$f(x) = 3x^2 - 2x + 1$$

Solución:

- $f'(x) = 6x - 2$

- Estudiamos el signo de la derivada:

$$6x - 2 = 0 \quad \rightarrow \quad x = \frac{1}{3}$$

$$6x - 2 > 0 \quad \rightarrow \quad 6x > 2 \quad \rightarrow \quad x > \frac{2}{6} \quad \rightarrow \quad x > \frac{1}{3}$$

$$6x - 2 < 0 \quad \rightarrow \quad 6x < 2 \quad \rightarrow \quad x < \frac{1}{3}$$

- La función decrece en $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right)$, crece en $\left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$, y tiene un mínimo en $x = \frac{1}{3}$.

Ejercicio nº 5.-
Averigua los puntos de tangente horizontal de la función:

$$f(x) = \frac{3 - x^2}{x + 2}$$

Solución:

- $f'(x) = \dfrac{-2x(x+2) - \left(3 - x^2\right)}{(x+2)^2} = \dfrac{-2x^2 - 4x - 3 + x^2}{(x+2)^2} = \dfrac{-x^2 - 4x - 3}{(x+2)^2}$

- $f'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad -x^2 - 4x - 3 = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 + 4x + 3 = 0 \quad \rightarrow$

$$\rightarrow \quad x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{-4 \pm 2}{2} \begin{cases} x = -1 \quad \rightarrow \quad f(-1) = 2 \quad \rightarrow \quad \text{Punto } (-1, 2) \\ x = -3 \quad \rightarrow \quad f(-3) = 6 \quad \rightarrow \quad \text{Punto } (-3, 6) \end{cases}$$

Ejercicio nº 6.-
Dada la función:

$$f(x) = 2x^3$$

determina los tramos en los que la función crece y en los que decrece.

Solución:

- $f'(x) = 6x^2$

- Como $f'(x) \geq 0$, la función es creciente.

Ejercicio nº 7.-
Halla los puntos de tangente horizontal de la siguiente función y, con ayuda de las ramas infinitas, decide si son máximos o mínimos:

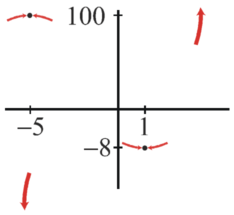
$$f(x) = x^3 + 6x^2 - 15x$$

Solución:

- $f'(x) = 3x^2 + 12x - 15 = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 + 4x - 5 = 0$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16+20}}{2} = \frac{-4 \pm 6}{2} \begin{cases} x = 1 \quad \rightarrow \quad f(1) = -8 \quad \rightarrow \quad \text{Punto } (1, -8) \\ x = -5 \quad \rightarrow \quad f(-5) = 100 \quad \rightarrow \quad \text{Punto } (-5, 100) \end{cases}$$

- $\lim_{x \to +\infty} \left(x^3 + 6x^2 - 15x \right) = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} \left(x^3 + 6x^2 - 15x \right) = -\infty$



Máximo en $(-5, 100)$ y mínimo en $(1, -8)$.

Ejercicio nº 8.-
Halla los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función:

$$f(x) = (x + 2)^2$$

Solución:

- $f'(x) = 2(x+2)$
- Estudiamos el signo de la derivada:

$$2(x+2) = 0 \quad \rightarrow \quad x + 2 = 0 \quad \rightarrow \quad x = -2$$
$$2(x+2) > 0 \quad \rightarrow \quad x + 2 > 0 \quad \rightarrow \quad x > -2$$
$$2(x+2) < 0 \quad \rightarrow \quad x + 2 < 0 \quad \rightarrow \quad x < -2$$

- La función decrece en $(-\infty, -2)$, crece en $(-2, +\infty)$, y tiene un mínimo en $x = 2$.

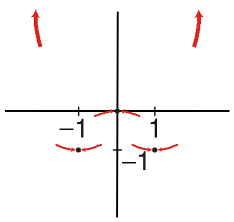
Ejercicio nº 9.-
Halla y representa gráficamente los puntos singulares de la función:

$$f(x) = x^4 - 2x^2$$

Solución:

- $f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1) = 0 \begin{cases} x = -1 \quad \rightarrow \quad f(-1) = -1 \quad \rightarrow \quad \text{Punto } (-1, -1) \\ x = 0 \quad \rightarrow \quad f(0) = 0 \quad \rightarrow \quad \text{Punto } (0, 0) \\ x = 1 \quad \rightarrow \quad f(1) = -1 \quad \rightarrow \quad \text{Punto } (1, -1) \end{cases}$
- Hallamos las ramas infinitas:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(x^4 - 2x^2 \right) = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} \left(x^4 - 2x^2 \right) = +\infty$$



Mínimo en $(-1, -1)$ y en $(1, -1)$; máximo en $(0, 0)$.

Ejercicio nº 10.-

Estudia el crecimiento y el decrecimiento de la función:

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{2}$$

Solución:

- $f'(x) = \dfrac{2x-3}{2}$

- Estudiamos el signo de la derivada:

$$\frac{2x-3}{2} = 0 \quad \rightarrow \quad 2x-3=0 \quad \rightarrow \quad x = \frac{3}{2}$$

$$\frac{2x-3}{2} > 0 \quad \rightarrow \quad 2x-3>0 \quad \rightarrow \quad 2x>3 \quad \rightarrow \quad x > \frac{3}{2}$$

$$\frac{2x-3}{2} < 0 \quad \rightarrow \quad 2x-3<0 \quad \rightarrow \quad 2x<3 \quad \rightarrow \quad x < \frac{3}{2}$$

- La función decrece en $\left(-\infty, \dfrac{3}{2}\right)$, crece en $\left(\dfrac{3}{2}, +\infty\right)$, y tiene un mínimo en $x = \dfrac{3}{2}$.