Ejercicio nº 1.-

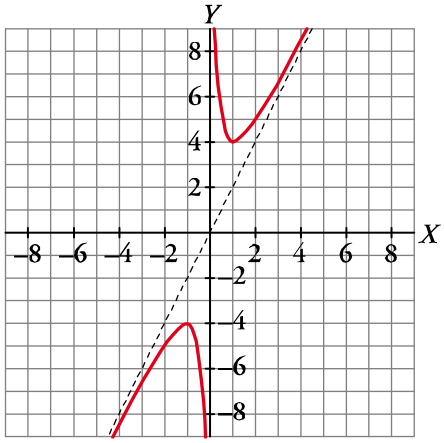
Representa gráficamente una función $f(x)$, de la que conocemos lo siguiente :

- **Su derivada se anula en $(-1, -4)$ y en $(1, 4)$.**
- **No corta a los ejes.**
- $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty; \qquad \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$

Tiene una asíntota oblicua, que es $y = 2x$. Además:

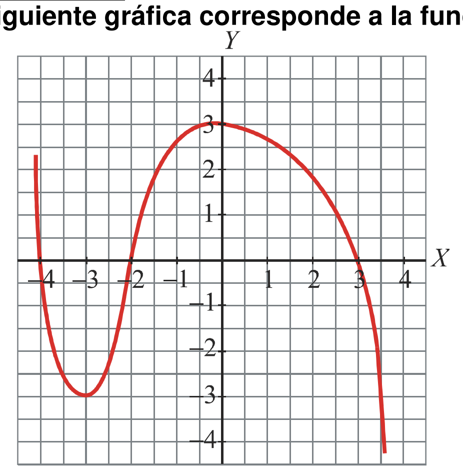
$$\begin{cases} \text{Si } x \to -\infty, & \text{la curva está por debajo de la asíntota.} \\ \text{Si } x \to +\infty, & \text{la curva está por encima de la asíntota.} \end{cases}$$

Solución:



Ejercicio nº 2.-

La siguiente gráfica corresponde a la función $f(x)$. A partir de ella, indica:



a) Máximos y mínimos.
b) Puntos de corte con los ejes.
c) Ramas infinitas.
d) Intervalos de crecimiento y de decrecimiento.

Solución:

a) $\left.\begin{aligned} f'(-3) &= 0 \\ f(-3) &= -3 \end{aligned}\right\}$ Hay un mínimo en $(-3, -3)$.

$$\left.\begin{array}{l} f'(0)=0 \\ f(0)=3 \end{array}\right\} \text{Hay un máximo en } (0,-3).$$

b) $(-4, 0)$, $(-2, 0)$, $(3, 0)$ y $(0, 3)$.

c) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$; $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

d) Decrece en $(-\infty, -3)$ y en $(0, +\infty)$; crece en $(-3, 0)$.

Ejercicio nº 3.-

Estudia y representa la función:

$$\boldsymbol{f(x) = x^4 + 2x^2 + 1}$$

Solución:

- $\lim_{x\to+\infty} \left(x^4 + 2x^2 + 1\right) = +\infty$; $\lim_{x\to-\infty} \left(x^4 + 2x^2 + 1\right) = +\infty$

Puntos de corte con los ejes:

Con el eje X $\rightarrow$ $x^4 + 2x^2 + 1 = 0$. Cambio $x^2 = z$

$$z^2 + 2z + 1 = 0$$

$$z = \frac{-2 \pm \sqrt{4-4}}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \quad \text{(no nos da un valor real para } x\text{).}$$

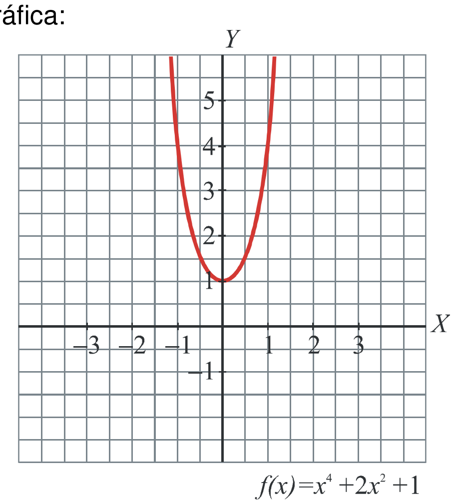
No corta al eje X.

Con el eje Y $\rightarrow$ $x = 0$ $\rightarrow$ $y = 1$ $\rightarrow$ Punto $(0, 1)$

Puntos singulares:

$f'(x) = 4x^3 + 4x = 4x\left(x^2 + 1\right) = 0$ $\rightarrow$ $x = 0$ $\rightarrow$ Punto $(0, 1)$

Gráfica:



Ejercicio nº 4.-

Estudia y representa la siguiente función:

$$f(x) = \frac{x^2}{x-2}$$

Solución:

Dominio $= \mathbb{R} - \{2\}$

Puntos de corte con los ejes:

Con el eje $X \to y = 0 \to \dfrac{x^2}{x-2} = 0 \to x = 0 \to$ Punto $(0, 0)$

Con el eje $Y \to x = 0 \to y = 0 \to$ Punto $(0, 0)$

Asíntota vertical: $x = 2$

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty; \qquad \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$

Asíntota oblicua:

$\dfrac{x^2}{x-2} = x + 2 + \dfrac{4}{x-2} \to y = x + 2$ es asíntota oblicua.

Si $x \to +\infty, \dfrac{4}{x-2} > 0 \to$ La curva está por encima de la asíntota.

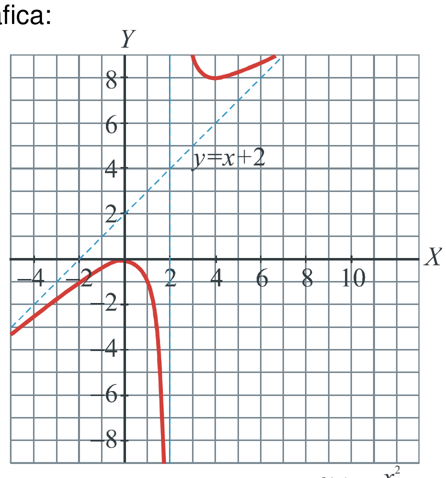
Si $x \to -\infty, \dfrac{4}{x-2} < 0 \to$ La curva está por debajo de la asíntota.

Puntos singulares:

$$f'(x) = \frac{2x(x-2) - x^2}{(x-2)^2} = \frac{2x^2 - 4x - x^2}{(x-2)^2} = \frac{x^2 - 4x}{(x-2)^2} = \frac{x(x-4)}{(x-2)^2}$$

$$f'(x) = 0 \to x(x-4) = 0 \to \begin{cases} x = 0 \to & \text{Punto } (0, 0) \\ x = 4 \to & \text{Punto } (4, 8) \end{cases}$$

- Gráfica:



$f(x) = \dfrac{x^2}{x-2}$

Ejercicio nº 5.-

Representa gráficamente la siguiente función, estudiando los aspectos que consideres más relevantes:

$$f(x) = \frac{x^3 + 2}{x}$$

Solución:

Dominio $= \mathbb{R} - \{0\}$

Puntos de corte con los ejes:

Con el eje $X \rightarrow y = 0 \quad \rightarrow \quad \dfrac{x^3 + 2}{x} = 0 \quad \rightarrow \quad x^3 + 2 = 0 \quad \rightarrow$

$\rightarrow x = \sqrt[3]{-2} \approx -1{,}3 \quad \rightarrow \quad$ Punto $(-1{,}3;\,0)$

Con el eje Y $\rightarrow$ No corta el eje Y, pues $x = 0$ no está en el dominio.

Asíntota vertical: $x = 0$

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty; \qquad \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$

Rama parabólica (pues el grado del numerador es dos unidades mayor que el del denominador).

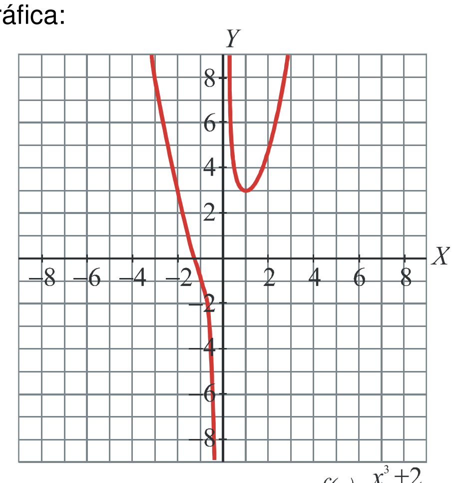
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; \qquad \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

Puntos singulares:

$$f'(x) = \frac{3x^2 \cdot x - (x^3 + 2)}{x^2} = \frac{3x^3 - x^3 - 2}{x^2} = \frac{2x^3 - 2}{x^2} = \frac{2(x^3 - 1)}{x^2}$$

$f'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad 2(x^3 - 1) = 0 \quad \rightarrow \quad x^3 - 1 = 0 \quad \rightarrow \quad x = \sqrt[3]{1} = 1 \quad \rightarrow \quad$ Punto $(1,\,3)$

Gráfica:



$f(x) = \dfrac{x^3 + 2}{x}$

Ejercicio nº 6.-

Estudia y representa la siguiente función:

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 1}$$

Solución:

Dominio $= \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

Puntos de corte con los ejes:

Con el eje $X \rightarrow y = 0 \rightarrow \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 1} = 0 \rightarrow x^2 - 4 = 0 \rightarrow x = \pm 2 \rightarrow$

$\rightarrow$ Puntos $(2, 0)$ y $(-2, 0)$

Con el eje $Y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = 4 \rightarrow$ Punto $(0, 4)$

Asíntotas verticales: $x = -1,\ x = 1$

$\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = -\infty; \qquad \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = +\infty; \qquad \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = -\infty$

Asíntota horizontal: $y = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1,$ con $y < 1$

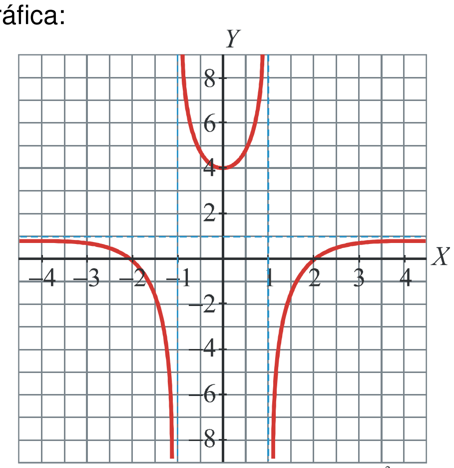
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1,$ con $y < 1$

Puntos singulares:

$$f'(x) = \frac{2x(x^2-1) - (x^2-4)\cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{2x^3 - 2x - 2x^3 + 8x}{(x^2-1)^2} = \frac{6x}{(x^2-1)^2}$$

$f'(x) = 0 \rightarrow 6x = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow$ Punto $(0, 4)$

Gráfica:



$f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 1}$

Ejercicio nº 7.-

Estudia y representa la siguiente función:

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{x^3}{x^2+1}}$$

Solución:

Dominio $= \mathbb{R}$

Puntos de corte con los ejes:

$$\text{Con el eje } X \rightarrow y = 0 \rightarrow \frac{x^3}{x^2+1} = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow \text{Punto } (0,\ 0)$$

$$\text{Con el eje } Y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow \text{Punto } (0,\ 0)$$

No tiene asíntotas verticales.
Asíntota oblicua:

$$\frac{x^3}{x^2+1} = x + \frac{-x}{x^2+1} \rightarrow y = x \text{ es asíntota oblicua.}$$

$$\text{Si } x \rightarrow +\infty,\ \frac{-x}{x^2+1} < 0 \rightarrow \text{La curva está por debajo de la asíntota.}$$

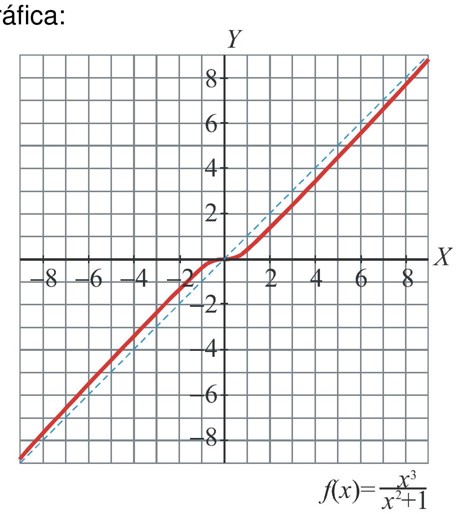
$$\text{Si } x \rightarrow -\infty,\ \frac{-x}{x^2+1} > 0 \rightarrow \text{La curva está por encima de la asíntota.}$$

Puntos singulares:

$$f'(x) = \frac{3x^2 \cdot (x^2+1) - x^3 \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{3x^4+3x^2-2x^4}{(x^2+1)^2} = \frac{x^4+3x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2(x^2+3)}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x^2(x^2+3) = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow \text{Punto } (0,\ 0)$$

Gráfica:



Ejercicio nº 8.-

Dada la función:

$$f(x)=\frac{x^4-2x^2+1}{x^2}$$

Estudia sus aspectos más relevantes y represéntala gráficamente.

Solución:

Dominio $= \mathbb{R} - \{0\}$

Puntos de corte con los ejes:

Con el eje $X \rightarrow y=0 \rightarrow x^4-2x^2+1=0$

$$\text{Si } x^2=z \rightarrow z^2-2z+1=0 \rightarrow z=\frac{2\pm\sqrt{4-4}}{2}=\frac{2}{2}=1$$

$$x^2=1 \rightarrow x=\pm 1 \rightarrow \text{Puntos } (-1,0) \text{ y } (1,0)$$

Con el eje $Y \rightarrow$ No corta el eje Y, porque $x=0$ no está en el dominio.

Asíntota vertical: $x=0$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=+\infty; \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$$

Rama parabólica (pues el grado del numerador es dos unidades mayor que el del denominador).

$$\lim_{x\to +\infty} f(x)=+\infty; \qquad \lim_{x\to -\infty} f(x)=+\infty$$

Puntos singulares:

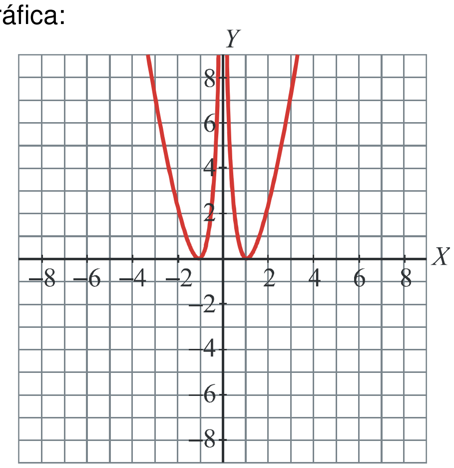
$$f'(x)=\frac{(4x^3-4x)x^2-(x^4-2x^2+1)2x}{x^4}=\frac{4x^5-4x^3-2x^5+4x^3-2x}{x^4}=$$

$$=\frac{2x^5-2x}{x^4}=\frac{x(2x^4-2)}{x\cdot x^3}=\frac{2x^4-2}{x^3}$$

$$f'(x)=0 \rightarrow 2(x^4-1)=0 \rightarrow x^4=1 \rightarrow x=\pm\sqrt[4]{1}=\pm 1 \rightarrow$$

$\rightarrow$ Puntos $(-1,0)$ y $(1,0)$

Gráfica:



$f(x)=\dfrac{x^4-2x^2+1}{x^2}$