Ejercicio nº 1.-

Representa una función *f(x)*, de la que sabemos lo siguiente:

- **La derivada no se anula en ningún punto.**

  La función es decreciente.

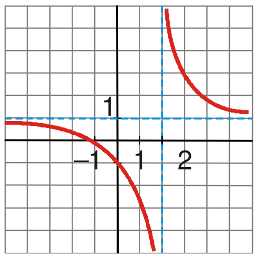
- **Corta a los ejes en (–1, 0) y en (0, –1).**

- $\lim_{x \to 2^-} f(x) = -\infty; \qquad \lim_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$

- **Tiene una asíntota horizontal en $y = 1$. Además:**

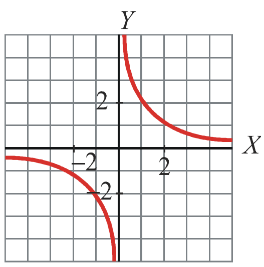
$$\begin{cases} \text{Si } x \to -\infty, & y < 1 \\ \text{Si } x \to +\infty, & y > 1 \end{cases}$$

Solución:



Ejercicio nº 2.-

Dada la gráfica de *f*(x), di cuáles son sus asíntotas e indica la posición de la curva respecto a ellas. Halla también los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función:



Solución:

Asíntota vertical: $x = 0$

Posición de la curva:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty; \qquad \lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$$

Asíntota horizontal: $y = 0$

Posición de la curva:

$$\begin{cases} \text{Si} \quad x \to -\infty, \quad y < 0 \\ \text{Si} \quad x \to +\infty, \quad y > 0 \end{cases}$$

- La función es decreciente en $(-\infty, 0)$ y en $(0, +\infty)$.

<u>Ejercicio nº 3.-</u>

Estudia y representa la función:

$$\boldsymbol{f(x) = x^4 - 2x^2}$$

Solución:

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x^4 - 2x^2\right) = +\infty; \qquad \lim\limits_{x\to-\infty} \left(x^4 - 2x^2\right) = +\infty$

Puntos de corte con los ejes:

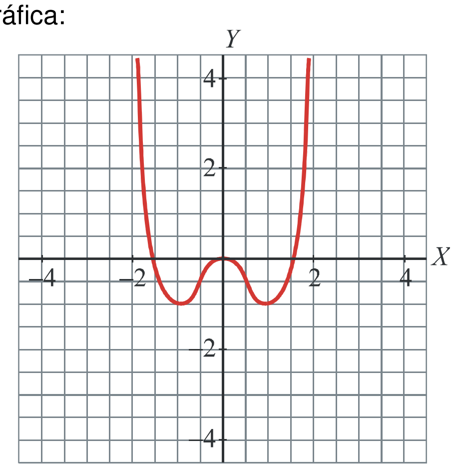
$$\text{Con el eje } X \;\to\; x^4 - 2x^2 = 0 \;\to\; x^2\left(x^2 - 2\right) = 0 \begin{cases} x = -\sqrt{2} \;\to\; \text{Punto}(-\sqrt{2},\; 0) \\ x = 0 \;\to\; \text{Punto } (0, 0) \\ x = -\sqrt{2} \;\to\; \text{Punto}(-\sqrt{2},\; 0) \end{cases}$$

$$\text{Con el eje } Y \;\to\; x = 0 \;\to\; y = 0 \;\to\; \text{Punto } (0,0)$$

Puntos singulares:

$$f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x\left(x^2 - 1\right) = 0 \begin{cases} x = -1 \;\to\; \text{Punto } (-1, -1) \\ x = 0 \;\to\; \text{Punto } (0, 0) \\ x = 1 \;\to\; \text{Punto } (1, -1) \end{cases}$$

Gráfica:



$f(x)=x^4-2x^2$

<u>Ejercicio nº 4.-</u>

Estudia y representa la siguiente función:

$$f(x) = \frac{3x}{x-2}$$

Solución:

Dominio $= \mathbb{R} - \{2\}$

Puntos de corte con los ejes:

Con el eje $X \rightarrow y = 0 \rightarrow \frac{3x}{x-2} = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow$ Punto $(0, 0)$

Con el eje $Y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow$ Punto $(0, 0)$

Asíntota vertical: $x = 2$

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty \quad ; \quad \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$

Asíntota horizontal: $y = 3$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3x}{x-2} = 3,$ con $y > 3$

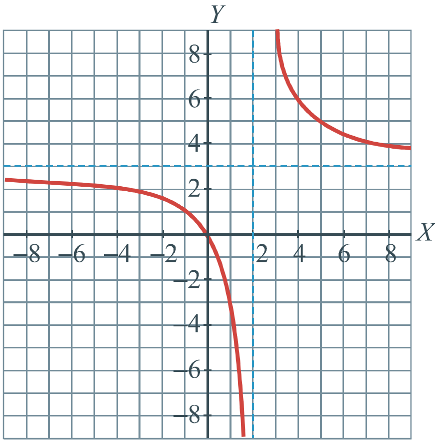
$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{3x}{x-2} = 3,$ con $y < 3$

Puntos singulares:

$$f'(x) = \frac{3(x-2) - 3x}{(x-2)^2} = \frac{3x - 6 - 3x}{(x-2)^2} = \frac{-6}{(x-2)^2} \neq 0$$

No tiene puntos singulares.

Gráfica:



$f(x) = \frac{3x}{x-2}$

<u>Ejercicio nº 5.-</u>

Estudia y representa la siguiente función:

$$f(x) = \frac{x^4 - 1}{x}$$

Solución:

Dominio $= \mathbb{R} - \{0\}$

Puntos de corte con los ejes:

Con el eje $X \quad \rightarrow \quad y = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{x^4 - 1}{x} = 0 \quad \rightarrow \quad x^4 - 1 = 0 \quad \rightarrow \quad x = \pm\sqrt[4]{1} = \pm 1 \quad \rightarrow$

$\rightarrow$ Puntos $(1, 0)$ y $(-1, 0)$

Con el eje Y $\rightarrow$ No corta al eje Y, pues $x = 0$ no está en el dominio.

Asíntota vertical: $x = 0$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = +\infty; \qquad \lim_{x \leftarrow 0^+} f(x) = -\infty$$

Rama parabólica (pues el grado del numerador es tres unidades mayor que el del denominador).

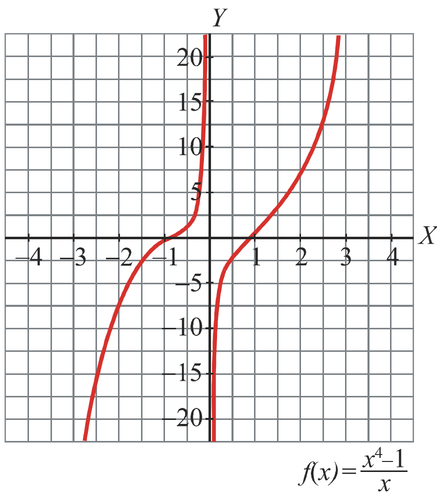
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

Puntos singulares:

$$f'(x) = \frac{4x^3 x - (x^4 - 1)}{x^2} = \frac{4x^4 - x^4 + 1}{x^2} = \frac{3x^4 + 1}{x^2} \neq 0$$

No tiene puntos singulares.

Gráfica:



Ejercicio nº 6.-

Dada la función:

$$f(x) = \frac{2x^2 + 1}{x^2}$$

Estudia sus aspectos más relevantes y represéntala gráficamente.

Solución:

Dominio $= \mathbb{R} - \{0\}$

Puntos de corte con los ejes:

Con el eje X $\rightarrow$ $y = 0$ $\rightarrow$ $2x^2 + 1 = 0$ $\rightarrow$ No corta al eje X.
Con el eje Y $\rightarrow$ No corta al eje Y, pues $x = 0$ no pertenece al dominio.

Asíntota vertical: $x = 0$

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = +\infty$; $\quad \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$

Asíntota horizontal: $x = 2$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$, con $y > 2$

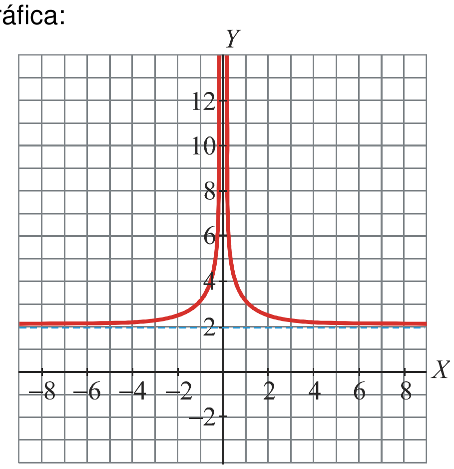
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 2$, con $y > 2$

Puntos singulares:

$$f'(x) = \frac{4x \cdot x^2 - (2x^2 + 1) \cdot 2x}{(x^2)^2} = \frac{4x^3 - 4x^3 - 2x}{x^4} = \frac{-2x}{x^4} = \frac{-2}{x^3} \neq 0$$

No tiene puntos singulares.

Gráfica:



$f(x) = \frac{2x^2+1}{x^2}$

<u>Ejercicio nº 7.-</u>

Representa gráficamente la siguiente función, estudiando previamente los aspectos que consideres más relevantes:

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{2x^3}{x^2 + 2}}$$

Solución:

Dominio $= \mathbb{R}$

Puntos de corte con los ejes:

Con el eje $X \;\rightarrow\; y=0 \;\rightarrow\; \dfrac{2x^3}{x^2+2}=0 \;\rightarrow\; x=0 \;\rightarrow\;$ Punto $(0,\,0)$

Con el eje $Y \;\rightarrow\; x=0 \;\rightarrow\; y=0 \;\rightarrow\;$ Punto $(0,\,0)$

No tiene asíntotas verticales.

Asíntota oblicua:

$\dfrac{2x^3}{x^2+2}=2x+\dfrac{-4x}{x^2+2} \;\rightarrow\; y=2x$ es asíntota oblicua.

Si $x\rightarrow+\infty$, $\dfrac{-4x}{x^2+2}<0 \;\rightarrow\;$ La curva está por debajo de la asíntota.

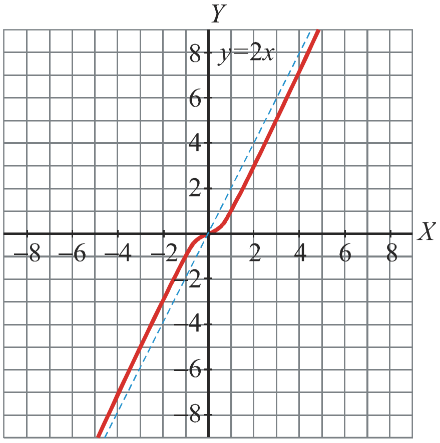
Si $x\rightarrow-\infty$, $\dfrac{-4x}{x^2+2}>0 \;\rightarrow\;$ La curva está por encima de la asíntota.

Puntos singulares:

$$f'(x)=\frac{6x^2\left(x^2+2\right)-2x^3\cdot 2x}{\left(x^2+2\right)^2}=\frac{6x^4+12x^2-4x^4}{\left(x^2+2\right)^2}=\frac{2x^4+12x^2}{\left(x^2+2\right)^2}=\frac{2x^2\left(x^2+6\right)}{\left(x^2+2\right)^2}$$

$f'(x)=0 \;\rightarrow\; 2x^2\left(x^2+6\right)=0 \;\rightarrow\; x=0 \;\rightarrow\;$ Punto $(0,\,0)$

Gráfica:



$f(x)=\dfrac{2x^3}{x^2+2}$

Ejercicio nº 8.-

Representa gráficamente la siguiente función, estudiando previamente los aspectos que consideres más relevantes:

$$\boldsymbol{f(x)=\frac{x^4-4}{x^2-1}}$$

Solución:

Dominio = $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$

Puntos de corte con los ejes:

Con el eje $X \rightarrow \quad y = 0 \quad \rightarrow \quad x^4 - 4 = 0 \quad \rightarrow \quad x = \pm\sqrt[4]{4} \approx \pm 1{,}4 \rightarrow$
$\rightarrow$ Puntos $(-1{,}4;\ 0)$ y $(1{,}4;\ 0)$

Con el eje $Y \quad \rightarrow \quad x = 0 \quad \rightarrow \quad y = 4 \quad \rightarrow \quad$ Punto $(0,\ 4)$

Asíntotas verticales: $x = -1$, $x = 1$

$\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = -\infty; \qquad \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = +\infty; \qquad \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = -\infty$

Rama parabólica (pues el grado del numerador es dos unidades mayor que el del denominador).

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \quad ; \qquad \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

Puntos singulares:

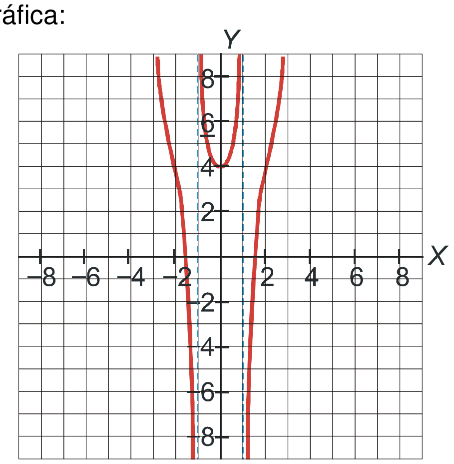
$$f'(x) = \frac{4x^3(x^2 - 1) - (x^4 - 4)\cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{4x^5 - 4x^3 - 2x^5 + 8x}{(x^2 - 1)^2} =$$

$$= \frac{2x^5 - 4x^3 + 8x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{2x(x^4 - 2x^2 + 4)}{(x^2 - 1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} 2x = 0 \quad \rightarrow \quad x = 0 \quad \rightarrow \quad \text{Punto } (0,\ 4) \\ x^4 - 2x^2 + 4 = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 = z, \quad z^2 - 2z + 4 = 0;\ z = \dfrac{2 + \sqrt{4 - 16}}{2} \end{cases}$$

(No tiene solución)

Gráfica:



$f(x) = \dfrac{x^4 - 4}{x^2 - 1}$