Ejercicio nº 1.-

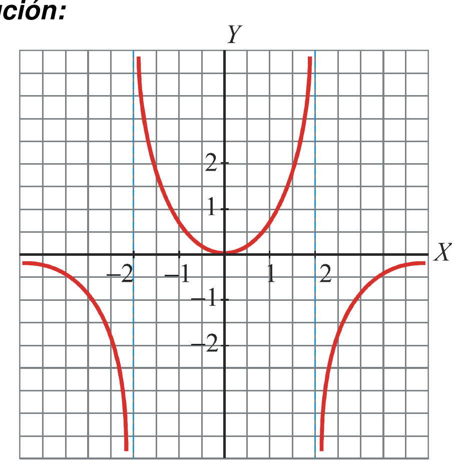
Dibuja la gráfica de la función $f(x)$, sabiendo que:

- **Su derivada se anula en $(0, 0)$.**
- **Solo corta a los ejes en $(0, 0)$.**
- **Sus asíntotas son: $x = -2$, $x = 2$ e $y = 0$**
- **La posición de la curva respecto a las asíntotas es:**

$$\begin{cases} \text{Si } x \to -\infty, & y < 0 \\ \text{Si } x \to +\infty, & y < 0 \end{cases}$$

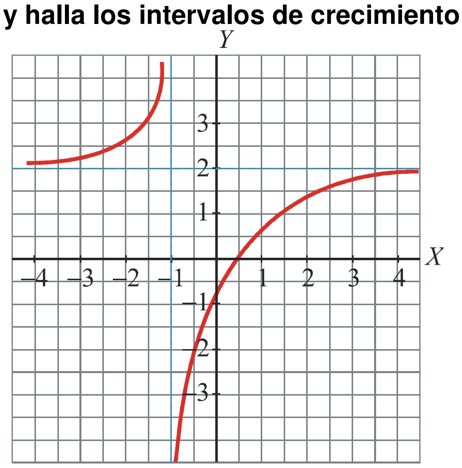
- $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = -\infty$

Solución:



Ejercicio nº 2.-

A partir de la gráfica de $f(x)$, di cuáles son sus asíntotas, indica la posición de la curva respecto a ellas y halla los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función:



Solución:

Asíntota vertical: $x = -1$

Posición de la curva:

$\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = -\infty$

Asíntota horizontal: $y = 2$

Posición de la curva:

$$\begin{cases} \text{Si} \quad x \to -\infty, \quad y > 2 \\ \text{Si} \quad x \to +\infty, \quad y < 2 \end{cases}$$

- La función es creciente en $(-\infty, -1)$ y en $(-1, +\infty)$.

<u>Ejercicio nº 3.-</u>

Estudia y representa la siguiente función:

$$\boldsymbol{f(x) = x^3 + 3x^2}$$

Solución:

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x^3+3x^2\right) = +\infty; \qquad \lim\limits_{x\to-\infty} \left(x^3+3x^2\right) = -\infty$

Puntos de corte con los ejes:

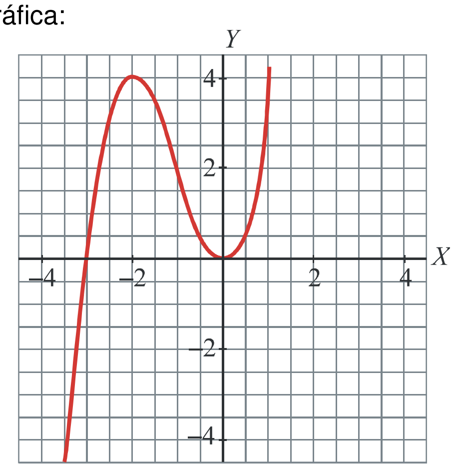
Con el eje $X \to x^3+3x^2=0 \quad \to \quad x^2(x+3) = 0 \begin{cases} x=0 & \to & \text{Punto } (0,0) \\ x=-3 & \to & \text{Punto } (-3, 0) \end{cases}$

Con el eje Y: $x = 0 \quad \to \quad y = 0 \to$ Punto $(0, 0)$

Puntos singulares:

$f'(x) = 3x^2 + 6x = 3x(x+2) = 0 \begin{cases} x=0 & \to & \text{Punto } (0,0) \\ x=-2 & \to & \text{Punto } (-2, 4) \end{cases}$

Gráfica:



$y=x^3+3x^2$

<u>Ejercicio nº 4.-</u>

Estudia y representa la función:

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{x+3}{x-1}}$$

Solución:

Dominio $= \mathbb{R} - \{1\}$

Puntos de corte con los ejes:

Con el eje $X \rightarrow y=0 \rightarrow \frac{x+3}{x-1}=0 \rightarrow x+3=0 \rightarrow x=-3 \rightarrow$ Punto $(-3,0)$

Con el eje $Y \rightarrow x=0 \rightarrow y=\frac{3}{-1}=-3 \rightarrow$ Punto $(0,-3)$

Asíntota vertical: $x=1$

$\lim_{x\to 1^-} f(x)=-\infty; \qquad \lim_{x\to 1^+} f(x)=+\infty$

Asíntota horizontal: $y=1$

$\lim_{x\to +\infty} f(x)=1$, con $y>1$

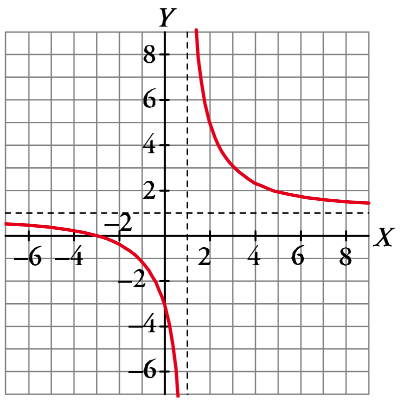
$\lim_{x\to -\infty} f(x)=1$, con $y<1$

Puntos singulares:

$$f'(x)=\frac{x-1-(x+3)}{(x-1)^2}=\frac{x-1-x-3}{(x-1)^2}=\frac{-4}{(x-1)^2}\neq 0$$

No tiene puntos singulares.

Gráfica:



Ejercicio nº 5.-

Estudia y representa la función:

$$f(x)=\frac{x^3}{x+2}$$

Solución:

Dominio $=\mathbb{R}-\{-2\}$

Puntos de corte con los ejes:

Con el eje $X \rightarrow y=0 \rightarrow \frac{x^3}{x+2}=0 \rightarrow x=0 \rightarrow$ Punto $(0,0)$

Con el eje $Y \rightarrow x=0 \rightarrow y=0 \rightarrow$ Punto $(0,0)$

Asíntota vertical: $x = -2$

$$\lim_{x \to -2^-} f(x) = +\infty; \qquad \lim_{x \to -2^+} f(x) = -\infty$$

Rama parabólica (pues el grado del numerador es dos unidades mayor que el del denominador).

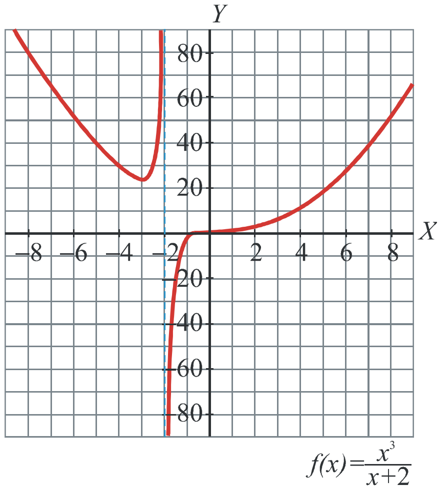
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

Puntos singulares:

$$f'(x) = \frac{3x^2(x+2) - x^3}{(x+2)^2} = \frac{3x^3 + 6x^2 - x^3}{(x+2)^2} = \frac{2x^3 + 6x^2}{(x+2)^2} = \frac{2x^2(x+3)}{(x+2)^2}$$

$$f'(x) = 0 \quad \to \quad 2x^2(x+3) = 0 \quad \begin{cases} x = 0 & \to \quad \text{Punto} \quad (0, 0) \\ x = -3 & \to \quad \text{Punto} \quad (-3, 27) \end{cases}$$

Gráfica:



Ejercicio nº 6.-

Representa gráficamente la siguiente función, estudiando previamente los aspectos que consideres más relevantes:

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$$

Solución:

Dominio = $\mathbb{R}$

Puntos de corte con los ejes:

Con el eje X $\to$ $y = 0$ $\to$ $\frac{x^2}{x^2+1} = 0$ $\to$ $x = 0$ $\to$ Punto $(0, 0)$

Con el eje Y $\to$ $x = 0$ $\to$ $y = 0$ $\to$ Punto $(0, 0)$

No tiene asíntotas verticales.

Asíntota horizontal: $y = 1$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1, \text{ con } y < 1$

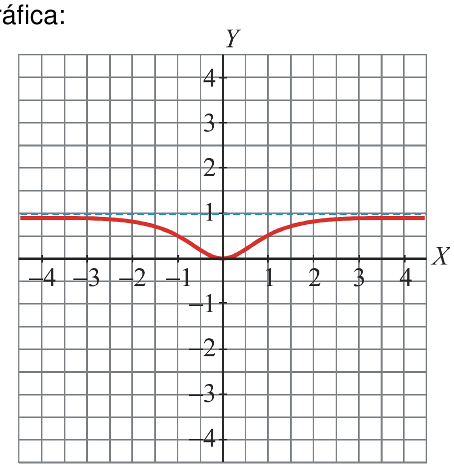
$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1, \text{ con } y < 1$

Puntos singulares:

$$f'(x) = \frac{2x\left(x^2+1\right) - x^2 \cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{2x^3+2x-2x^3}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}$$

$f'(x) = 0 \quad \to \quad 2x = 0 \quad \to \quad x = 0 \quad \to \quad$ Punto $(0, 0)$

Gráfica:



$f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$

Ejercicio nº 7.-

Estudia y representa la función:

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 2x + 1}}$$

Solución:

Dominio:

$x^2+2x+1 = 0 \quad \to \quad x = \frac{-2 \pm \sqrt{4-4}}{2} = \frac{-2}{2} = -1$

Dominio $= \mathbb{R} - \{-1\}$

Puntos de corte con los ejes:

Con el eje $X \quad \to \quad y = 0 \quad \to \quad \frac{x^3}{x^2+2x+1} = 0 \quad \to \quad x^3 = 0 \quad \to \quad x = 0 \quad \to \quad$ Punto $(0, 0)$

Con el eje $Y \quad \to \quad x = 0 \quad \to \quad y = 0 \quad \to \quad$ Punto $(0, 0)$

Asíntota vertical: $x = -1$

$$\frac{x^3}{x^2+2x+1}=\frac{x^3}{(x+1)^2}; \qquad \lim_{x\to -1^-} f(x)=-\infty; \qquad \lim_{x\to -1^+} f(x)=-\infty$$

Asíntota oblicua:

$$\frac{x^3}{x^2+2x+1}=x-2+\frac{3x+2}{x^2+2x+1} \quad \rightarrow \quad y=x-2 \text{ es asíntota oblicua.}$$

Si $x\to +\infty$, $\frac{3x+2}{x^2+2x+1}>0$ $\rightarrow$ La curva está por encima de la asíntota.

Si $x\to -\infty$, $\frac{3x+2}{x^2+2x+1}<0$ $\rightarrow$ La curva está por debajo de la asíntota.

Puntos singulares:

$$f'(x)=\frac{3x^2\left(x^2+2x+1\right)-x^3(2x+2)}{\left(x^2+2x+1\right)^2}=\frac{3x^4+6x^3+3x^2-2x^4-2x^3}{\left(x^2+2x+1\right)^2}=$$

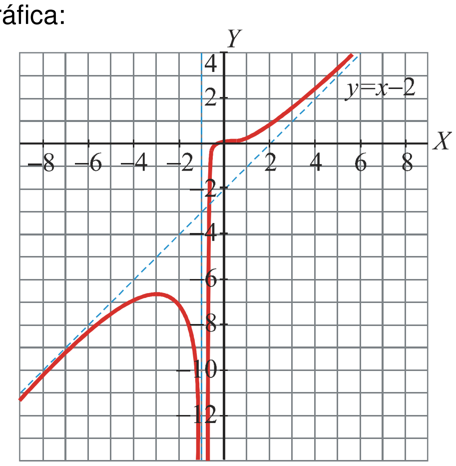
$$=\frac{x^4+4x^3+3x^2}{\left(x^2+2x+1\right)^2}=\frac{x^2\left(x^2+4x+3\right)}{\left(x^2+2x+1\right)^2}$$

$$f'(x)=0\ \begin{cases} x^2=0 \ \rightarrow \ x=0 \ \rightarrow \ \text{Punto } (0,0) \\ x^2+4x+3=0 \ \rightarrow \ x=\dfrac{-4\pm\sqrt{16-12}}{2}=\dfrac{-4\pm 2}{2}\ \begin{cases} x=-3 \\ x=-1 \end{cases} \end{cases}$$

$x=-1$ no vale, pues no está en el dominio.

Punto $\left(-3, \frac{-27}{4}\right)$

Gráfica:



$f(x)=\frac{x^3}{x^2+2x+1}$

Ejercicio nº 8.-

Estudia y representa la función:

$$\boldsymbol{f(x)=\frac{x^4+1}{x^2}}$$

Solución:

Dominio $= \mathbb{R} - \{0\}$

Puntos de corte con los ejes:

Con el eje $X \rightarrow y=0 \rightarrow x^4+1=0 \rightarrow$ No corta al eje *X.*
Con el eje $Y \rightarrow$ No corta al eje *Y*, pues $x=0$ no está en el dominio.

Asíntota vertical: $x=0$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = +\infty; \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$$

Rama parabólica (pues el grado del numerador es dos unidades mayor que el del denominador).

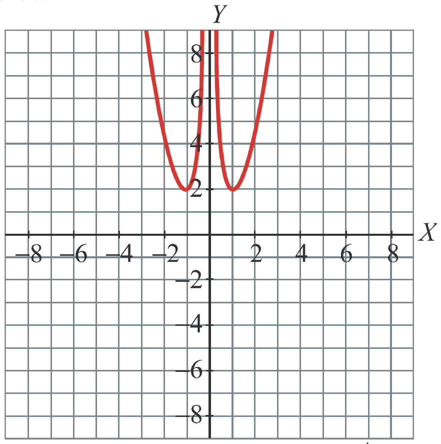
$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty; \qquad \lim_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$$

Puntos singulares:

$$f'(x) = \frac{4x^3\cdot x^2-\left(x^4+1\right)\cdot 2x}{\left(x^2\right)^2} = \frac{4x^5-2x^5-2x}{x^4} = \frac{2x^5-2x}{x^4} = \frac{2x\left(x^4-1\right)}{x^4} = \frac{2\left(x^4-1\right)}{x^3}$$

$f'(x)=0 \rightarrow 2\left(x^4-1\right)=0 \rightarrow x^4-1=0 \rightarrow x^4=1 \rightarrow x=\pm\sqrt[4]{1}=\pm 1 \rightarrow$
$\rightarrow$ Puntos $(-1, 2)$ y $(1, 2)$

Gráfica:



$f(x)=\frac{x^4+1}{x^2}$