Ejercicio nº 1.-

Teniendo en cuenta la definición de logaritmo, halla el valor de x en cada caso:

a) $\log_2 x = 5$
b) $\log_x 27 = 3$

Solución:

a) $\log_2 x = 5 \quad \rightarrow \quad 2^5 = x \quad \rightarrow \quad x = 32$
b) $\log_x 27 = 3 \quad \rightarrow \quad x^3 = 27 \quad \rightarrow \quad x = 3$

Ejercicio nº 2.-

Efectúa y simplifica:

a) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{\frac{98}{50}}$
b) $\sqrt{80} - 2\sqrt{45}$
c) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1}$

Solución:

a) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{\frac{98}{50}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 98}{50}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 2 \cdot 7^2}{2 \cdot 5^2}} = \frac{7}{5}\sqrt{3} = \frac{7\sqrt{3}}{5}$

b) $\sqrt{80} - 2\sqrt{45} = \sqrt{2^4 \cdot 5} - 2\sqrt{5 \cdot 3^2} = 4\sqrt{5} - 6\sqrt{5} = -2\sqrt{5}$

c) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1} = \frac{\sqrt{3}\left(\sqrt{3} + 1\right)}{\left(\sqrt{3} - 1\right)\left(\sqrt{3} + 1\right)} = \frac{3 + \sqrt{3}}{3 - 1} = \frac{3 + \sqrt{3}}{2}$

Ejercicio nº 3.-

Si sabemos que $\log k = 0{,}9$, calcula:

$$\log \frac{k^3}{100} - \log\left(100\sqrt{k}\right)$$

Solución:

$\log \frac{k^3}{100} - \log\left(100\sqrt{k}\right) = \log k^3 - \log 100 - \left(\log 100 + \log \sqrt{k}\right) =$
$= 3\log k - \log 100 - \log 100 - \log k^{1/2} =$
$= 3\log k - 2\log 100 - \frac{1}{2}\log k = \frac{5}{2}\log k - 2\log 100 =$

$$= \frac{5}{2} \cdot 0{,}9 - 2 \cdot 2 = 2{,}25 - 4 = -1{,}75$$

Ejercicio nº 4.-

Obtén el término general de cada una de las sucesiones siguientes:

a) $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{18}, \frac{1}{54}, \frac{1}{162}, \ldots$ **b)** $\frac{2}{1}, \frac{4}{4}, \frac{8}{9}, \frac{16}{16}, \frac{32}{25}, \ldots$

Solución:

a) Es una progresión geométrica con $a_1 = \frac{1}{2}$ y $r = \frac{1}{3}$. Por tanto:

$$a_n = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

b) $a_n = \frac{2^n}{n^2}$

Ejercicio nº 5.-

En una progresión geométrica, sabemos que $a_1 = 2$ y $r = 3$.
Calcula la suma de sus 12 primeros términos.

Solución:

Calculamos a_{12}:

$$a_{12} = a_1 \cdot r^{11} = 2 \cdot 3^{11} = 354\,294$$

La suma será:

$$S_{12} = \frac{a_1 - a_{12} \cdot r}{1 - r} = \frac{2 - 354\,294 \cdot 3}{1 - 3} = \frac{2 - 1062\,882}{-2} = 531\,440$$

Ejercicio nº 6.-

Resuelve:

a) $\frac{x}{x+1} - \frac{16}{6} = \frac{x+1}{x}$

b) $\frac{3^{x^2 - x + 1}}{3^{x+1}} = \frac{1}{3}$

Solución:

a) $\frac{x}{x+1}-\frac{16}{6}=\frac{x+1}{x}$

$$\frac{6x^2}{6x(x+1)}-\frac{16x(x+1)}{6x(x+1)}=\frac{6(x+1)^2}{6x(x+1)}$$

$$6x^2-16x^2-16x=6\left(x^2+2x+1\right)$$

$$6x^2-16x^2-16x=6x^2+12x+6$$

$$-16x^2-28x-6=0$$

$$16x^2+28x+6=0 \;\rightarrow\; 8x^2+14x+3=0$$

$$x=\frac{-14\pm\sqrt{196-96}}{16}=\frac{-14\pm\sqrt{100}}{16}=\frac{-14\pm 10}{16} \quad\rightarrow\quad \begin{cases} x=\dfrac{-4}{16}=\dfrac{-1}{4} \\ x=\dfrac{-24}{16}=\dfrac{-3}{2} \end{cases}$$

Hay dos soluciones: $x_1=\frac{-1}{4}$; $\quad x_2=\frac{-3}{2}$

b) $\frac{3^{x^2-x+1}}{3^{x+1}}=\frac{1}{3} \quad\rightarrow\quad 3^{x^2-x+1-(x+1)}=3^{-1}$

$$x^2-x+1-x-1=-1\rightarrow \quad x^2-2x+1=0$$

$$x=\frac{2\pm\sqrt{4-4}}{2}=\frac{2}{2}=1$$

Hay una única solución: $x=1$

Ejercicio nº 7.-

Halla las soluciones del sistema:

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{x-y=9} \\ \boldsymbol{\log x-\log y=1} \end{aligned}\right\}$$

Solución:

$$\left.\begin{aligned} x-y=9 \\ \log x-\log y=1 \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} x=9+y \\ \log\frac{x}{y}=1 \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} x=9+y \\ \frac{x}{y}=10 \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} x=9+y \\ x=10y \end{aligned}\right\}$$

$$9+y=10y \quad\rightarrow\quad 9=9y \quad\rightarrow\quad y=1 \quad\rightarrow\quad x=10$$

Hay una solución: $x = 10; \; y = 1$

Ejercicio nº 8.-

Encuentra la solución del siguiente sistema de ecuaciones, utilizando el método de Gauss:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x + 2y + z = 3} \\ \boldsymbol{2x - 2y + 3z = -1} \\ \boldsymbol{3x - 2y + 2z = 2} \end{cases}$$

Solución:

$$\left.\begin{array}{r} x + 2y + z = 3 \\ 2x - 2y + 3z = -1 \\ 3x - 2y + 2z = 2 \end{array}\right\} \boxed{\begin{array}{l} 1^a \\ 2^a + 1^a \\ 3^a + 1^a \end{array}} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x + 2y + z = 3 \\ 3x + 4z = 2 \\ 4x + 3z = 5 \end{array}\right\} \boxed{\begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \\ 4 \cdot 2^a - 3 \cdot 3^a \end{array}} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x + 2y + z = 3 \\ 3x + 4z = 2 \\ 7z = -7 \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r} z = -1 \\ x = \dfrac{2 - 4z}{3} = 2 \\ y = \dfrac{3 - x - z}{2} = 1 \end{array}\right\} \boxed{\begin{array}{l} x = 2 \\ y = 1 \\ z = -1 \end{array}}$$

Ejercicio nº 9.-

La edad de un padre hace dos años era el triple de la edad de su hijo. Dentro de once años, el padre tendrá el doble de la edad del hijo. ¿Cuál es la edad actual de cada uno?

Solución:

Llamamos x a la edad actual del padre e y a la edad actual del hijo. Así:

	EDAD ACTUAL	HACE DOS AÑOS	DENTRO DE 11 AÑOS
PADRE	x	$x - 2$	$x + 11$
HIJO	y	$y - 2$	$y + 11$

Hace dos años, la edad del padre era el triple de la edad del hijo:

$$x - 2 = 3(y - 2)$$

Dentro de once años, el padre tendrá el doble de edad que el hijo:

$$x+11=2(y+11)$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} x-2=3(y-2) \\ x+11=2(y+11) \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x-2=3y-6 \\ x+11=2y+22 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x=3y-4 \\ 3y-4+11=2y+22 \end{array}\right\}$$

$$3y-2y=22+4-11 \quad \rightarrow \quad y=15$$
$$x=3y-4=45-4=41$$

El padre tiene 41 años y el hijo, 15 años.

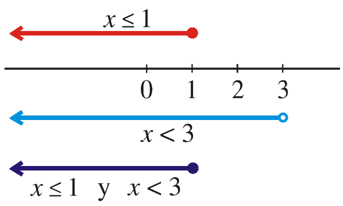
<u>Ejercicio nº 10.-</u>

Resuelve el sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{3(x-2)+7\leq 4} \\ \mathbf{2(x-1)<4} \end{array}\right\}$$

Solución:

$$\left.\begin{array}{l} 3(x-2)+7\leq 4 \\ 2(x-1)<4 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} 3x-6+7\leq 4 \\ 2x-2<4 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} 3x\leq 3 \\ 2x<6 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x\leq 1 \\ x<3 \end{array}$$



Las soluciones del sistema son las soluciones comunes a las dos inecuaciones, es decir:

$$\{x\leq 1 \text{ y } x<3\}=\{x \,/\, x\leq 1\}=(-\infty, 1]$$