Ejercicio nº 1.-

Calcula, utilizando la definición de logaritmo:

a) $\boldsymbol{log_5 125}$

b) $\boldsymbol{log \frac{1}{1\,000}}$

c) $\boldsymbol{log_2 \sqrt{2}}$

Solución:

a) $log_5 125 = log_5 5^3 = 3$

b) $log \frac{1}{1\,000} = log 10^{-3} = -3$

c) $log_2 \sqrt{2} = log_2 2^{1/2} = \frac{1}{2}$

Ejercicio nº 2.-

Calcula y simplifica al máximo:

a) $\boldsymbol{\sqrt{27} \cdot \sqrt{\frac{32}{81}}}$

b) $\boldsymbol{\sqrt{75} + 2\sqrt{48}}$

c) $\boldsymbol{\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}}$

Solución:

a) $\sqrt{27} \cdot \sqrt{\frac{32}{81}} = \sqrt{\frac{27 \cdot 32}{81}} = \sqrt{\frac{3^3 \cdot 2^5}{3^4}} = \sqrt{\frac{2^5}{3}} = 2^2 \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{6}}{3}$

b) $\sqrt{75} + 2\sqrt{48} = \sqrt{3 \cdot 5^2} + 2\sqrt{2^4 \cdot 3} = 5\sqrt{3} + 8\sqrt{3} = 13\sqrt{3}$

c) $\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} = \frac{\left(2+\sqrt{2}\right)\left(2+\sqrt{2}\right)}{\left(2-\sqrt{2}\right)\left(2+\sqrt{2}\right)} = \frac{4+2+4\sqrt{2}}{4-2} = \frac{6+4\sqrt{2}}{2} = 3+2\sqrt{2}$

Ejercicio nº 3.-

Expresa como un solo logaritmo la siguiente expresión, utilizando las propiedades de los logaritmos:

$$\boldsymbol{3\,log 2 + log 5 + log \frac{1}{25} - \log 4}$$

Solución:

$$3log\,2+log\,5+log\frac{1}{25}-log\,4=log\,2^{3}+log\,5+log\frac{1}{25}-log\,4=$$
$$=log\,8+log\,5+log\frac{1}{25}-log\,4=log\frac{8\cdot 5}{25\cdot 4}=log\frac{2}{5}=-0,40$$

<u>Ejercicio nº 4.-</u>

a) Halla el término general de la sucesión:

$-\mathbf{2}\,,\,\mathbf{4}\,,-\mathbf{8}\,,\mathbf{16}\,,-\mathbf{32}\,,\dots$

b) Averigua el criterio de formación de la siguiente sucesión recurrente:

$\mathbf{2}\,,\mathbf{3}\,,\mathbf{6}\,,\mathbf{18}\,,\mathbf{108}\,,\mathbf{1944}\,,\dots$

Solución:

a) Es una progresión geométrica con a_1 = -2 y r = -2. Por tanto:

$$a_n=(-2)\cdot(-2)^{n-1}=(-2)^n$$

b) A partir del tercero, cada término se obtiene multiplicando los dos anteriores:

$$a_1=2\;\;,\;\;a_2=3\;\;,\;\;a_n=a_{n-1}\cdot a_{n-2}\quad\text{para } n>2$$

<u>Ejercicio nº 5.-</u>

Calcula la suma $a_7+a_8+\ldots+a_{30}$, sabiendo que a_n es una progresión aritmética cuyo término general es $a_n=3n+1$.

Solución:

a) Calculamos a_7 y a_{30}:

$a_7=3\cdot 7+1=21+1=22$; $a_{30}=3\cdot 30+1=90+1=91$

El número de términos en la suma es 24. Por tanto:

$$S=\frac{(a_7+a_{30})\cdot 24}{2}=\frac{(22+91)\cdot 24}{2}=1356$$

<u>Ejercicio nº 6.-</u>

Obtén las soluciones de las ecuaciones siguientes:

a) $\sqrt{5x+4}=2x+1$

b) $\mathbf{3^{2x} - 3^{x+1} + \frac{8}{9} = 0}$

Solución:

a) $\sqrt{5x+4} = 2x+1$

$5x+4 = (2x+1)^2$

$5x+4 = 4x^2 + 4x + 1$

$0 = 4x^2 - x - 3$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+48}}{8} = \frac{1 \pm \sqrt{49}}{8} = \frac{1 \pm 7}{8} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{-6}{8} = \frac{-3}{4} \end{cases}$$

Comprobación:

$x = 1 \quad \rightarrow \quad \sqrt{9} = 3 = 2+1 \quad \rightarrow$ Es válida

$x = \frac{-3}{4} \quad \rightarrow \quad \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \neq \frac{-3}{2} + 1 = \frac{-1}{2} \quad \rightarrow$ No es válida

Hay una solución: $x = 1$

b) $3^{2x} - 3^{x+1} + \frac{8}{9} = 0$

$\left(3^x\right)^2 - 3^x \cdot 3 + \frac{8}{9} = 0$

Hacemos el cambio $3^x = y$:

$y^2 - 3y + \frac{8}{9} = 0 \quad \rightarrow \quad 9y^2 - 27y + 8 = 0$

$$y = \frac{27 \pm \sqrt{729-288}}{18} = \frac{27 \pm \sqrt{441}}{18} = \frac{27 \pm 21}{18} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} y = \frac{48}{18} = \frac{8}{3} \\ y = \frac{6}{18} = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$- \ y = \frac{8}{3} \quad \rightarrow \quad 3^x = \frac{8}{3} \quad \rightarrow \quad x = log_3 \frac{8}{3} = log_3 8 - 1 = \frac{log\ 8}{log\ 3} - 1 = 0{,}89$

$- \ y = \frac{1}{3} \quad \rightarrow \quad 3^x = \frac{1}{3} \quad \rightarrow \quad x = -1$

Hay dos soluciones: $x_1 = -1$; $x_2 = 0{,}89$

<u>Ejercicio nº 7.-</u>

Resuelve:

$$\left.\begin{array}{r}\boldsymbol{x-2y=0}\\ \boldsymbol{2^x+2^y=6}\end{array}\right\}$$

Solución:

$$\left.\begin{array}{r}x-2y=0\\ 2^x+2^y=6\end{array}\right\}\quad \left.\begin{array}{l}x=2y\\ 2^{2y}+2^y=6\end{array}\right\}\quad \left(2^y\right)^2+2^y=6$$

Hacemos el cambio: $2^y=z$

$$z^2+z-6=0 \quad\to\quad z=\frac{-1\pm\sqrt{1+24}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{25}}{2}=\frac{-1\pm5}{2}\quad\to\quad \begin{cases}z=2\\ z=-3\end{cases}$$

$-\ z=2 \quad\to\quad 2^y=2 \quad\to\quad y=1 \quad\to\quad x=2$

$-\ z=-3 \quad\to\quad 2^y=-3 \quad\to\quad$ no válida

Hay una solución: $x=2;\ y=1$

<u>Ejercicio nº 8.-</u>

Halla la solución del siguiente sistema mediante el método de Gauss:

$$\begin{cases}\boldsymbol{3x+y-2z=6}\\ \boldsymbol{2x-y+3z=-8}\\ \boldsymbol{x+y-z=4}\end{cases}$$

Solución:

$$\left.\begin{array}{r}3x+y-2z=6\\ 2x-y+3z=-8\\ x+y-z=4\end{array}\right\}\ \boxed{\begin{array}{l}1^{a}\\ 2^{a}+1^{a}\\ 3^{a}-1^{a}\end{array}}\ \to\ \left.\begin{array}{r}3x+y-2z=6\\ 5x+z=-2\\ -2x+z=-2\end{array}\right\}\ \boxed{\begin{array}{l}1^{a}\\ 2^{a}\\ 3^{a}-2^{a}\end{array}}\ \to\ \left.\begin{array}{r}3x+y-2z=6\\ 5x+z=-2\\ -7x=0\end{array}\right\}\ \to$$

$$\to\quad \left.\begin{array}{r}x=0\\ z=-2-5x=-2\\ y=6-3x+2z=2\end{array}\right\}\quad \boxed{\begin{array}{l}x=0\\ y=2\\ z=-2\end{array}}$$

<u>Ejercicio nº 9.-</u>

Se mezcla cierta cantidad de café de 1,2 euros/kg con otra cantidad de café de 1,8 euros/kg, obteniendo 60 kg al precio de 1,4 euros/kg. ¿Cuántos kilogramos de cada clase se han utilizado en la mezcla?

Solución:

Llamamos x a la cantidad de café utilizado del primer tipo e y a la cantidad del segundo tipo. Así:

$x + y = 60$ (pues hemos obtenido 60 kg de mezcla)
$1{,}2x + 1{,}8y = 60 \cdot 1{,}4$ (este es el precio total de la mezcla)

Resolvemos el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 60 \\ 1{,}2x + 1{,}8y = 84 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} y = 60 - x \\ 1{,}2x + 1{,}8(60 - x) = 84 \end{array}\right\}$$

$$1{,}2x + 108 - 1{,}8x = 84 \quad \rightarrow \quad 1{,}2x - 1{,}8x = 84 - 108$$
$$-0{,}6x = -24 \quad \rightarrow \quad x = 40$$
$$y = 60 - x = 60 - 40 = 20$$

Se han utilizado 40 kg del primer tipo y 20 kg del segundo tipo.

<u>Ejercicio nº 10.-</u>

Resuelve e interpreta gráficamente esta inecuación:

$$-3x + 1 > -5$$

Solución:

– Resolvemos la inecuación:

$$-3x + 1 > -5 \quad \rightarrow \quad -3x > -6 \quad \rightarrow \quad 3x < 6 \quad \rightarrow \quad x < 2$$

$$Soluciones: \{x \,/\, x < 2\} = (-\infty,\ 2)$$

– La interpretación gráfica es la siguiente: para valores de x menores que 2, la recta $y = -3x + 1$, va por encima de la recta $y = -5$; es decir, $-3x + 1 > -5$: