Ejercicio nº 1.-

Halla el valor de la siguiente expresión, utilizando la definición de logaritmo:

$$\boldsymbol{log_4 16 + log_3 \sqrt[5]{81} - ln\, 1}$$

Solución:

$$log_4 16 + log_3 \sqrt[5]{81} - ln\, 1 = log_4 4^2 + log_3 3^{4/5} - ln\, 1 = 2 + \frac{4}{5} - 0 = \frac{14}{5}$$

Ejercicio nº 2.-

Simplifica al máximo las siguientes expresiones:

a) $\sqrt{\dfrac{48}{75}} \cdot \sqrt{2}$

b) $\sqrt{108} - \sqrt{147}$

c) $\dfrac{2\sqrt{3} + \sqrt{6}}{\sqrt{3}}$

Solución:

a) $\sqrt{\dfrac{48}{75}} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{\dfrac{48 \cdot 2}{75}} = \sqrt{\dfrac{2^4 \cdot 3 \cdot 2}{3 \cdot 5^2}} = \dfrac{4}{5}\sqrt{2} = \dfrac{4\sqrt{2}}{5}$

b) $\sqrt{108} - \sqrt{147} = \sqrt{2^2 \cdot 3^3} - \sqrt{3 \cdot 7^2} = 6\sqrt{3} - 7\sqrt{3} = -\sqrt{3}$

c) $\dfrac{2\sqrt{3} + \sqrt{6}}{\sqrt{3}} = \dfrac{\left(2\sqrt{3} + \sqrt{6}\right)\sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \dfrac{6 + \sqrt{18}}{3} = \dfrac{6 + \sqrt{2 \cdot 3^2}}{3} = \dfrac{6 + 3\sqrt{2}}{3} = 2 + \sqrt{2}$

Ejercicio nº 3.-

Sabiendo que *log* 3 = 0,48, calcula (sin utilizar la calculadora) el logaritmo (en base 10) de cada uno de estos números:

a) 30 b) 9 c) $\boldsymbol{\sqrt[5]{9}}$

Solución:

a) $log 30 = log\left(3 \cdot 10\right) = log 3 + log 10 = 0{,}48 + 1 = 1{,}48$

b) $log 9 = log 3^2 = 2 log 3 = 2 \cdot 0{,}48 = 0{,}96$

c) $log \sqrt[5]{9} = log 3^{2/5} = \dfrac{2}{5} log 3 = \dfrac{2}{5} \cdot 0{,}48 = 0{,}192$

Ejercicio nº 4.-

Halla el término general de cada una de estas sucesiones:

a) $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \ldots$ **b)** $-2 ; -0{,}5 ; 1 ; 2{,}5 ; 4 ; \ldots$

Solución:

a) $a_n = \frac{n+1}{n+2}$

b) Es una progresión aritmética con $a_1 = -2$ y $d = 1{,}5$. Por tanto:

$$a_n = -2 + (n-1) \cdot 1{,}5 = -2 + 1{,}5n - 1{,}5 = 1{,}5n - 3{,}5$$

$$a_n = 1{,}5n - 3{,}5$$

Ejercicio nº 5.-

Calcula la suma desde el término a_{15} hasta el a_{40} (ambos incluidos) en la progresión aritmética cuyo término general es $a_n = 2n - 3$.

Solución:

Calculamos a_{15} y a_{40}:

$a_{15} = 2 \cdot 15 - 3 = 30 - 3 = 27$; $a_{40} = 2 \cdot 40 - 3 = 80 - 3 = 77$

El número de términos en la suma es 26. Por tanto:

$$S = \frac{(a_{15} + a_{40}) \cdot 26}{2} = \frac{(27 + 77) \cdot 26}{2} = 1352$$

Ejercicio nº 6.-

Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $3\sqrt{x-1} + 11 = 2x$

b) $2^{x-1} + 2^{x+1} - 3 \cdot 2^x + 4 = 0$

Solución:

a) $3\sqrt{x-1}+11=2x$

$3\sqrt{x-1}=2x-11 \quad 3\sqrt{x-1}=2x-11$

$\left(3\sqrt{x-1}\right)^2=\left(2x-11\right)^2$

$9\left(x-1\right)=4x^2-44x+121$

$9x-9=4x^2-44x+121$

$0=4x^2-53x+130$

$$x=\frac{53\pm\sqrt{2\,809-2\,080}}{8}=\frac{53\pm\sqrt{729}}{8}=\frac{53\pm 27}{8} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x=10 \\ x=\dfrac{26}{8}=\dfrac{13}{4} \end{cases}$$

Comprobación:

$x=10 \quad \rightarrow \quad 3\sqrt{9}+11=9+11=20=2\cdot 10 \quad \rightarrow$ Es válida

$x=\dfrac{13}{4} \quad \rightarrow \quad 3\sqrt{\dfrac{9}{4}}+11=\dfrac{9}{2}+11=\dfrac{31}{2}\neq 2\cdot\dfrac{13}{4}=\dfrac{13}{2} \quad \rightarrow$ No es válida

Hay una solución: $x=10$

b) $2^{x-1}+2^{x+1}-3\cdot 2^x+4=0$

$\dfrac{2^x}{2}+2^x\cdot 2-3\cdot 2^x+4=0$

Hacemos el cambio: $2^x=y$

$\dfrac{y}{2}+2y-3y+4=0$

$y+4y-6y+8=0 \quad \rightarrow \quad -y+8=0 \quad \rightarrow \quad y=8$

$2^x=8 \quad \rightarrow \quad x=3$

Ejercicio nº 7.-

Obtén las soluciones del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{y^2-x^2} &= \mathbf{-3} \\ \boldsymbol{xy} &= \mathbf{-2} \end{aligned}\right\}$$

Solución:

$$\left.\begin{aligned} y^2-x^2 &= -3 \\ xy &= -2 \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} y^2-x^2 &= -3 \\ y &= \frac{-2}{x} \end{aligned}\right\} \quad \left(\frac{-2}{x}\right)^2-x^2=-3$$

$$\frac{4}{x^2} - x^2 = -3 \quad \to \quad 4 - x^4 = -3x^2 \quad \to \quad 0 = x^4 - 3x^2 - 4$$

Cambio: $x^2 = z \quad \to \quad z^2 - 3z - 4 = 0$

$$z = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2} \quad \to \quad \begin{cases} z = 4 \quad \to \quad x^2 = 4 \quad \to \quad x = \pm\sqrt{4} = \pm 2 \\ z = -1 \quad \to \quad \text{no vale} \end{cases}$$

- $x = 2 \quad \to \quad y = -1$
- $x = -2 \quad \to \quad y = 1$

Hay dos soluciones: $x_1 = 2;\ y_1 = -1$
$x_2 = -2;\ y_2 = 1$

Ejercicio nº 8.-

Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones, aplicando el método de Gauss:

$$\begin{cases} -2\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} = -4 \\ 3\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} - 2\boldsymbol{z} = 6 \\ 2\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} = 6 \end{cases}$$

Solución:

$$\left.\begin{array}{r} -2x - y + z = -4 \\ 3x + y - 2z = 6 \\ 2x + y + z = 6 \end{array}\right\} \boxed{\begin{array}{l} 1^a \\ 2^a + 1^a \\ 3^a + 1^a \end{array}} \to \left.\begin{array}{r} -2x + -y + z = -4 \\ x - z = 2 \\ 2z = 2 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} z = 1 \\ x = 2 + z = 3 \\ y = -2x + z + 4 = -1 \end{array}\right\}$$

Solución : $\quad x = 3 \ , \ y = -1 \ , \ z = 1$

Ejercicio nº 9.-

La suma de dos números es -10 y la de sus inversos, $\frac{2}{15}$. Hállalos.

Solución:

x, y son los números buscados.

$$\left.\begin{array}{l} x + y = -10 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{15} \end{array}\right\} \begin{array}{l} y = -10 - x \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{-10 - x} = \frac{2}{15} \quad \to \quad \frac{1}{x} - \frac{1}{10 + x} = \frac{2}{15} \end{array}$$

$$\frac{15(10+x)}{15x(10+x)} - \frac{15x}{15x(10+x)} = \frac{2x(10+x)}{15x(10+x)}$$

$$150 + \cancel{15x} - \cancel{15x} = 20x + 2x^2 \;\rightarrow\; 2x^2 + 20x - 150 = 0 \;\rightarrow\; x^2 + 10x - 75 = 0$$

$$x = \frac{-10 \pm \sqrt{100+300}}{2} = \frac{-10 \pm \sqrt{400}}{2} = \frac{-10 \pm 20}{2} = \begin{cases} -15 \;\rightarrow\; y = 5 \\ 5 \;\rightarrow\; y = -15 \end{cases}$$

Los números son -15 y 5.

Ejercicio nº 10.-

Resuelve e interpreta gráficamente la siguiente inecuación:

$$\boldsymbol{x^2 - 4 \leq 0}$$

Solución:

$$x^2 - 4 = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 = 4 \quad \rightarrow \quad x = \pm\sqrt{4} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x = -2 \\ x = 2 \end{cases}$$

La parábola $y = x^2 - 4$ corta al eje x en $x = -2$ y en $x = 2$.
En el intervalo $[-2, 2]$ toma valores negativos o nulos. Por tanto, las soluciones de la inecuación son los puntos del intervalo $[-2, 2]$: