Ejercicio nº 1.-

a) Halla el ángulo que forman los vectores $\vec{a}(2,\ 3)$ y $\vec{b}(2,\ -3)$.

b) ¿Cuánto ha de valer k para que los vectores $\vec{x}\,(k,\ 3)$ e $\vec{y}(k,\ -3)$ sean perpendiculares?

Solución:

a) $cos\left(\widehat{\vec{a},\ \vec{b}}\right) = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|} = \dfrac{4-9}{\sqrt{2^2+3^2}\cdot\sqrt{2^2+(-3)^2}} = \dfrac{-5}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{13}} = \dfrac{-5}{13} = -0{,}385 \quad \rightarrow$

$\rightarrow \quad \left(\widehat{\vec{a},\ \vec{b}}\right) = 112^\circ\ 37'12''$

b) Para que $\vec{x}$ e $\vec{y}$ sean perpendicualares, su producto escalar ha de ser cero:

$\vec{x}\cdot\vec{y} = (k,\ 3)\cdot(k,\ -3) = k^2 - 9 = 0 \quad \rightarrow \quad k^2 = 9 \quad \rightarrow \quad k = \pm\sqrt{9} = \pm 3$

Hay dos posibles valores para k:

$k_1 = -3 \qquad k_2 = 3$

Ejercicio nº 2.-

a) Halla las ecuaciones paramétricas de la recta, r, que pasa por el punto $A(2,\ 5)$ y es paralela a la recta:

$$r_2: \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2 - 2t \end{cases}$$

b) Estudia la posición relativa de r_1 (la recta que has obtenido en a)) con la recta:

$$r_3: \begin{cases} x = 4 - 2t \\ y = -1 + 4t \end{cases}$$

Solución:

a) Vector posición: $\overrightarrow{OA} = (2,\ 5)$

Vector dirección: (1,–2) (puesto que es paralelo a r_2)

Las ecuaciones paramétricas serán:

$$r_1: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 5 - 2t \end{cases}$$

b) Cambiando el parámetro de r_3:

$r_1:\begin{cases}x=2+t\\y=5-2t\end{cases}$ $\qquad$ $r_3:\begin{cases}x=4-2k\\y=-1+4k\end{cases}$

Igualamos:

$$\left.\begin{array}{l}2+t=4-2k\\5-2t=-1+4k\end{array}\right\}\quad\begin{array}{l}t=2-2k\\5-2(2-2k)=-1+4k\end{array}$$

$$5-4+4k=-1+4k$$
$$2=0\cdot k$$

No tiene solución $\rightarrow$ Las dos rectas son paralelas.

<u>Ejercicio nº 3.-</u>

a) Escribe la ecuación implícita de la recta que pasa por el punto *P*(–1, 1) y tiene pendiente 4.

b) Estudia la posición relativa de la recta que has obtenido en a) con la recta de ecuación $2x-y+1=0$.

Solución:

a) Escribimos la forma punto–pendiente y operamos:

$$y=1+4(x+1)\quad\rightarrow\quad y=1+4x+4\quad\rightarrow\quad 4x-y+5=0$$

b) $\left.\begin{array}{l}2x-y+1=0\\4x-y+5=0\end{array}\right\}\quad\left.\begin{array}{l}y=2x+1\\y=4x+5\end{array}\right\}\quad\begin{array}{l}2x+1=4x+5\\-4=2x\end{array}$

$$x=-2\quad\rightarrow\quad y=-3$$

Por tanto, las dos rectas se cortan en el punto (–2, –3).

<u>Ejercicio nº 4.-</u>

Averigua el ángulo que forman las rectas:

$$\mathbf{2x-3y+4=0;\quad y=\frac{-3x+2}{2}}$$

Solución:

Obtenemos las pendientes de las rectas dadas:

$$2x-3y+4=0\quad\rightarrow\quad y=\frac{2x+4}{3}\quad\rightarrow\quad y=\frac{2}{3}x+\frac{4}{3}\quad\rightarrow\quad pendiente=\frac{2}{3}$$

$$y=\frac{-3x+2}{2}\quad\rightarrow\quad y=\frac{-3}{2}x+1\quad\rightarrow\quad pendiente=\frac{-3}{2}$$

Observamos que: $\frac{2}{3} \cdot \frac{-3}{2} = -1$; por tanto, las rectas son perpendiculares.

Ejercicio nº 5.-

Dados el punto $P(k, 1)$ y la recta r: $3x - 4y + 1 = 0$, halla el valor de k para que la distancia de P a r sea 3.

Solución:

$$dist(P,\ r) = \frac{|3k - 4 + 1|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{|3k-3|}{\sqrt{9+16}} = \frac{|3k-3|}{\sqrt{25}} = \frac{|3k-3|}{5} = 3$$

$$\begin{cases} \frac{3k-3}{5} = 3 \quad \rightarrow \quad 3k - 3 = 15 \quad \rightarrow \quad 3k = 18 \quad \rightarrow \quad k = 6 \\ \frac{3k-3}{5} = -3 \quad \rightarrow \quad 3k - 3 = -15 \quad \rightarrow \quad 3k = -12 \quad \rightarrow \quad k = -4 \end{cases}$$

Hay dos soluciones: $k_1 = 6$; $k_2 = -4$

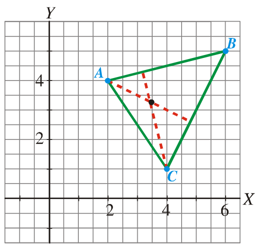
Ejercicio nº 6.-

Dado el triángulo de vértices $A(2, 4)$, $B(6, 5)$ y $C(4, 1)$, halla:

a) Las ecuaciones de las alturas que parten de A y de C.

b) El ortocentro (punto de corte de las alturas).

Solución:



a) Altura que parte de A:

Como es perpendicular a la recta que pasa por B y por C, para obtener su pendiente hacemos lo siguiente:

La pendiente de la recta que pasa por B y C es:

$$m = \frac{5-1}{6-4} = \frac{4}{2} = 2$$

La pendiente de la perpendicular es: $\frac{-1}{2}$

Así la ecuación de la altura es:

$$y=4-\frac{1}{2}(x-2) \quad\to\quad 2y=8-x+2 \quad\to\quad x+2y-10=0$$

Altura que parte de C:

La pendiente de la recta que pasa por A y B es:

$$m=\frac{5-4}{6-2}=\frac{1}{4}$$

La pendiente de la perpendicular es: $\frac{-1}{1/4}=-4$

Así, la ecuación de la altura es:

$$y=1-4(x-4) \quad\to\quad y=1-4x+16 \quad\to\quad 4x+y-17=0$$

b) El ortocentro es el punto de corte de las alturas:

$$\left.\begin{array}{r} x+2y-10=0 \\ 4x+y-17=0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x=-2y+10 \\ 4(-2y+10)+y-17=0 \end{array}$$

$$-8y+40+y-17=0$$

$$-7y=-23 \quad\to\quad y=\frac{-23}{-7}=\frac{-23}{7}$$

$$x=-2y+10=\frac{24}{7}$$

Por tanto, el ortocentro es el punto $\left(\frac{24}{7},\ \frac{23}{7}\right)$.

<u>Ejercicio nº 7.-</u>

Halla el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de *A*(2, 1) y *B*(6, 0). ¿Qué figura obtienes?

Solución:

Si $P\,(x, y)$ es un punto del lugar geométrico, tenemos que:

$dist(P,A) = dist(P,B)$

$$\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}=\sqrt{(x-6)^2+y^2}$$

$$x^2-4x+4x+y^2-2y+1=x^2-12x+36+y^2$$

$$8x-2y-31=0$$

Es la mediatriz del segmento AB (es perpendicular a $\overrightarrow{AB}$ y pasa por el punto medio de AB).