Ejercicio nº 1.-

Dados los vectores $\vec{x}\,(a,\ 1)$ e $\vec{y}\,(-2,\ b)$, halla los valores de a y b para que $\vec{x}$ e $\vec{y}$ sean perpendiculares, y que $\left|\vec{y}\right| = 2\sqrt{2}$.

Solución:

Calculamos el valor de b teniendo en cuenta que $\left|\vec{y}\right| = 2\sqrt{2}$:

$$\left|\vec{y}\right| = \sqrt{(-2)^2 + b^2} = \sqrt{4 + b^2} = 2\sqrt{2} \quad \rightarrow \quad 4 + b^2 = 8 \quad \rightarrow \quad b^2 = 4$$

$$b = \pm\sqrt{4} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} b_1 = -2 \\ b_2 = 2 \end{cases}$$

Hay dos posibles valores para b:

$b_1 = -2$ y $b_2 = 2$

Hallamos a teniendo en cuenta que $\vec{x}$ e $\vec{y}$ han de ser perpendiculares (su producto escalar será cero):

- $1^{\underline{er}}$ Caso: $b_1 = -2$

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = (a,\ 1) \cdot (-2,\ -2) = -2a - 2 = 0 \quad \rightarrow \quad a_1 = -1$$

- 2.° Caso: $b_2 = 2$

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = (a,\ 1) \cdot (-2,\ 2) = -2a + 2 = 0 \quad \rightarrow \quad a_2 = 1$$

Por tanto las soluciones son dos:

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= -1 \\ b_1 &= -2 \end{aligned}\right\} \quad \text{y} \quad \left.\begin{aligned} a_2 &= 1 \\ b_2 &= 2 \end{aligned}\right\}$$

Ejercicio nº 2.-

a) Obtén las ecuaciones paramétricas de la recta, r, que pasa por $P(3, -2)$ y es perpendicular a la recta $2x - y + 4 = 0$.

b) Estudia la posición relativa de la recta, r, obtenida en a), con la recta:

$$s: \begin{cases} x = 3 - t \\ y = -1 + t \end{cases}$$

Solución:

a) El vector (2, –1) es perpendicular a la recta $2x - y + 4 = 0$.
Por tanto, podemos tomar:

Vector posición: $\overrightarrow{OP}(3,-2)$
Vector dirección: $(2,-1)$

Ecuaciones paramétricas:

$$r: \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -2 - t \end{cases}$$

b) Cambiamos el parámetro de la recta s:

$$r: \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -2 - t \end{cases} \qquad\qquad s: \begin{cases} x = 3 - k \\ y = -1 + k \end{cases}$$

Igualamos:

$$\left.\begin{array}{l} 3 + 2t = 3 - k \\ -2 - t = -1 + k \end{array}\right\} \begin{array}{l} k = -2t \\ -2 - t = -1 - 2t \quad \rightarrow \quad t = 1 \quad \rightarrow \quad k = -2 \end{array}$$

Sustituyendo $t = 1$ en las ecuaciones de r (o bien $k = -2$ en las de s), obtenemos que las dos rectas se cortan en el punto (5, –3).

<u>Ejercicio nº 3.-</u>

a) Halla la ecuación implícita de la recta que pasa por $P(1, 2)$ y por el punto de corte de las rectas:

$$x - 2y + 3 = 0 \qquad\qquad 2x + y + 1 = 0$$

b) Determina la posición relativa de la recta que has obtenido en a) con $2x - 4y + 1 = 0$.

Solución:

a) Hallamos el punto de corte de las dos rectas:

$$\left.\begin{array}{l} x - 2y + 3 = 0 \\ 2x + y + 1 = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 2y - 3 \\ 2(2y - 3) + y + 1 = 0 \end{array}$$

$$4y - 6 + y + 1 = 0$$

$$5y = 5 \quad \rightarrow \quad y = 1 \quad \rightarrow \quad x = -1$$

Tenemos que hallar la ecuación implícita de la recta que pasa por los puntos (1, 2) y (–1, 1).
La pendiente es:

$$m = \frac{1-2}{-1-1} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$$

Por tanto:

$$y = 2 + \frac{1}{2}(x - 1) \quad \rightarrow \quad 2y = 4 + x - 1 \quad \rightarrow \quad x - 2y + 3 = 0$$

b) Tenemos que hallar la posición relativa de:

$$\left.\begin{array}{r} x-2y+3=0 \\ 2x-4y+1=0 \end{array}\right\}$$ Observamos que:

$$\frac{1}{2}=\frac{-2}{-4}\neq\frac{3}{1}$$

Por tanto, las rectas son paralelas.

<u>Ejercicio nº 4.-</u>

Calcula el ángulo formado por las rectas:

$$\boldsymbol{y=-2x+3} \qquad \boldsymbol{y=4x+1}$$

Solución:

La pendiente de cada recta es:

$y=-2x+3 \quad \rightarrow \quad pendiente=-2$
$y=4x+1 \quad \rightarrow \quad pendiente=4$

Por tanto, si α es el ángulo que forman las rectas:

$$tg\,\alpha=\left|\frac{4-(-2)}{1+(-2)\cdot 4}\right|=\left|\frac{4+2}{1-8}\right|=\left|\frac{6}{-7}\right|=\frac{6}{7}=0{,}857 \quad \rightarrow \quad \alpha=40^\circ\,36'\,5''$$

<u>Ejercicio nº 5.-</u>

Calcula la distancia del punto $\mathbf{P(3,2)}$ a la recta

$$\boldsymbol{r}\mathbf{:}\begin{cases}\boldsymbol{x=-2+3t} \\ \boldsymbol{y=1-2t}\end{cases}$$

Solución:

Pasamos la recta r a la forma implícita:

$$\left.\begin{array}{l} 2\cdot(x=-2+3t) \\ 3\cdot(y=1-2t) \end{array}\right\} \quad \begin{array}{r} 2x=-4+6t \\ 3y=3-6t \end{array}$$

$$2x+3y=-1 \quad \rightarrow \quad 2x+3y+1=0$$

Así:

$$dist(P,\,r)=\frac{|2\cdot 3+3\cdot 2+1|}{\sqrt{2^2+3^2}}=\frac{|6+6+1|}{\sqrt{4+9}}=\frac{13}{\sqrt{13}}=\frac{13\sqrt{13}}{13}=\sqrt{13}\approx 3{,}6 \text{ u}$$

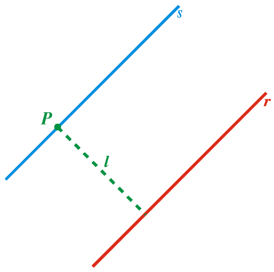
<u>Ejercicio nº 6.-</u>

Sabiendo que dos de los lados de un cuadrado están sobre las rectas:

$$r\text{: } 2x - 3y + 4 = 0 \qquad s\text{: } 2x - 3y + 1 = 0$$

Calcula el área de dicho cuadrado.

Solución:



Aunque no sepamos dónde está situado exactamente el cuadrado, sí sabemos que la longitud del lado es la distancia entre las dos rectas.
Para calcular esta distancia, tomamos un punto, P, de s y hallamos su distancia a r.

$\left(\text{Previamente, hemos observado que } r \text{ y } s \text{ son paralelas, puesto que } \frac{2}{2} = \frac{-3}{-3} \neq \frac{4}{1}\right).$

Obtenemos un punto, P, de s. Por ejemplo:

$$x = 1 \;\rightarrow\; 2 - 3y + 1 = 0 \;\rightarrow\; 3 = 3y \;\rightarrow\; y = 1$$

Tomamos entonces $P(1,\ 1)$ y calculamos su distancia a la recta r:

$$dist(P,\ r) = \frac{|2 - 3 + 4|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}} = \frac{3}{\sqrt{4 + 9}} = \frac{3}{\sqrt{13}}$$

Por tanto el lado del cuadrado es : $\frac{3}{\sqrt{13}}$; y, así, su área será :

$$\text{Área} = (lado)^2 = \left(\frac{3}{\sqrt{13}}\right)^2 = \frac{9}{13} \approx 0{,}69 \text{ u}^2$$

<u>Ejercicio nº 7.-</u>

Halla el lugar geométrico de los puntos del plano cuya distancia al punto $A(1,\ 2)$ es igual a la distancia a la recta $r : y = 1$. ¿Qué figura obtienes?

Solución:

Si $P(x,\ y)$ es un punto del lugar geométrico, tenemos que:
$dist\ (P,\ A) = dist\ (P,\ r)$, es decir:

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} = |\,y - 1\,|$$

Elevamos al cuadrado y simplificamos:

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = y^2 - 2y + 1$$

$$x^2 - 2x + 4 = 2y \quad \rightarrow \quad y = \frac{1}{2}x^2 - x + 2$$

Se trata de una parábola. Su foco es el punto A y su directriz, la recta r.