Ejercicio nº 1.-

Dado el vector $\vec{u}\,(-3,\ 4)$, halla:

a) El ángulo que forma con $\vec{v}\,(2,\,-1)$.
b) El valor de k para que $\vec{w}\,(2,\ k)$ sea perpendicular a $\vec{u}$.

Solución:

a) $cos\left(\widehat{\vec{u},\,\vec{v}}\right)=\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\left|\vec{u}\right|\cdot\left|\vec{v}\right|}=\dfrac{-6-4}{\sqrt{(-3)^2+4^2}+\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\dfrac{-10}{5\sqrt{5}}=\dfrac{-2\sqrt{5}}{5}\approx-0{,}894 \quad\rightarrow$

$\rightarrow \quad \left(\widehat{\vec{u},\,\vec{v}}\right)=153^\circ\,26'\,6''$

b) Para que $\vec{u}$ y $\vec{w}$ sean perpendiculares, su producto escalar ha de ser cero:

$$\vec{u}\cdot\vec{w}=(-3,\ 4)\cdot(2,\ k)=-6+4k=0 \quad\rightarrow\quad k=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$$

Ejercicio nº 2.-

a) Escribe las ecuaciones paramétricas de la recta, *r*, que pasa por los puntos *P*(2, –1) y *Q*(3, 4).

b) Averigua la posición relativa de la recta obtenida en a) con la recta:

$$s:\begin{cases}x=t\\ y=-3+t\end{cases}$$

Solución:

a) Vector posición: $\overrightarrow{OP}(2,-1)$
Vector dirección: $\overrightarrow{PQ}\,(1,\ 5)$

Ecuaciones paramétricas:

$$r:\begin{cases}x=2+t\\ y=-1+5t\end{cases}$$

b) Cambiamos el parámetro de la recta s:

$$r:\begin{cases}x=2+t\\ y=-1+5t\end{cases} \qquad s:\begin{cases}x=k\\ y=-3+k\end{cases}$$

Igualamos:

$$\left.\begin{array}{l} 2+t=k \\ -1+5t=-3+k \end{array}\right\} -1+5t=-3+2+t$$

$$5t-t=-3+2+1$$

$$4t=0 \quad \rightarrow \quad \left.\begin{array}{r} t=0 \\ k=2 \end{array}\right\}$$

Sustituyendo $t=0$ en las ecuaciones de r (o bien $k=2$ en las de s), obtenemos que las dos rectas se cortan en el punto (2, –1).

<u>Ejercicio nº 3.-</u>

a) Escribe la ecuación implícita de la recta que pasa por los puntos *A*(1, –4) y *B*(–2, 2).

b) Determina la posición relativa de la recta que has obtenido en a) con la recta $2x+y+2=0$.

Solución:

a) La pendiente de la recta es:

$$m=\frac{2-(-4)}{-2-1}=\frac{2+4}{-3}=\frac{6}{-3}=-2$$

La ecuación será:

$$y=-4-2(x-1) \quad \rightarrow \quad y=-4-2x+2 \quad \rightarrow \quad 2x+y+2=0$$

b) Tenemos que hallar la posición relativa de las rectas:

$$\left.\begin{array}{l} 2x+y+2=0 \\ 2x+y+2=0 \end{array}\right\} \text{Evidentemente, se trata de la misma recta}$$

<u>Ejercicio nº 4.-</u>

Halla el ángulo formado por estas rectas:

$$\mathbf{3x-y+2=0 \qquad x+4y+1=0}$$

Solución:

Obtenemos la pendiente de cada una de las rectas:

$$3x-y+2=0 \quad \rightarrow \quad y=3x+2 \quad \rightarrow \quad pendiente=3$$

$$x+4y+1=0 \quad \rightarrow \quad y=\frac{-x-1}{4} \quad \rightarrow \quad y=\frac{-1}{4}x-\frac{1}{4} \quad \rightarrow \quad pendiente=\frac{-1}{4}$$

Si llamamos α al ángulo que forman las rectas, entonces:

$$tg\,\alpha = \left|\frac{3-(-1/4)}{1+3\cdot(-1/4)}\right| = \left|\frac{3+1/4}{1-3/4}\right| = \left|\frac{13/4}{1/4}\right| = 13 \quad\rightarrow\quad \alpha = 85^\circ\, 36'\, 5''$$

Ejercicio nº 5.-

Halla la distancia que hay desde el punto $P(2,\ 4)$ a la recta $r\colon y = \dfrac{x+3}{2}$

Solución:

Escribimos r en forma implícita:

$$y = \frac{x+3}{2} \quad\rightarrow\quad 2y = x+3 \quad\rightarrow\quad x-2y+3=0$$

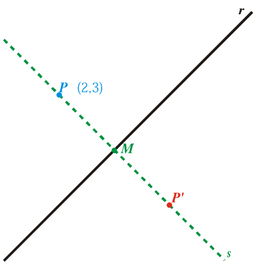
Así:

$$dist(P,\ r) = \frac{|2-2\cdot 4+3|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}} = \frac{|2-8+3|}{\sqrt{1+4}} = \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5} \approx 1{,}34\ \text{u}$$

Ejercicio nº 6.-

Halla el punto simétrico de $P(2,\ 3)$ con respecto a la recta $r\colon 3x - y + 5 = 0$.

Solución:



1.°) Hallamos la ecuación de la recta, s, perpendicular a r que pasa por P:

Pendiente de $r \;\rightarrow\; y = 3x+5 \;\rightarrow\; m = 3$

Pendiente de la perpendicular $\;\rightarrow\; \dfrac{-1}{3}$

La ecuación de s será:

$$y = 3 - \frac{1}{3}(x-2) \quad\rightarrow\quad 3y = 9 - x + 2 \quad\rightarrow\quad x+3y-11=0$$

2.°) Hallamos el punto, M, de intersección de r y s:

$$\left.\begin{array}{l} 3x-y+5=0 \\ x+3y-11=0 \end{array}\right\} x = 11-3y$$

$$3(11-3y)-y+5=0 \quad\rightarrow\quad 33-9y-y+5=0 \quad\rightarrow\quad 38 = 10y$$

$y = \frac{38}{10} = \frac{19}{5} \quad \rightarrow \quad x = 11 - 3y = 11 - \frac{57}{5} = \frac{-2}{5}$

El punto es $M\left(-\frac{2}{5}, \frac{19}{5}\right)$.

3.°) Si llamamos $P(x, y)$ al simétrico de P con respecto a r, M es el punto medio del segmento que une P con P'.

Por tanto:

$\frac{x+2}{2} = \frac{-2}{5} \quad \rightarrow \quad 5x + 10 = -4 \quad \rightarrow \quad 5x = -14 \quad \rightarrow \quad x = -\frac{14}{5}$

$\frac{y+3}{2} = \frac{19}{5} \quad \rightarrow \quad 5y + 15 = 38 \quad \rightarrow \quad 5y = 23 \quad \rightarrow \quad y = \frac{23}{5}$

Luego: $P'\left(\frac{-14}{5}, \frac{23}{5}\right)$

Ejercicio nº 7.-

Dados los puntos $A(-1, 0)$ y $B(1, 0)$, halla el lugar geométrico de los puntos, P, del plano tales que el cociente de distancias : $\frac{dist\ (P, A)}{dist\ (P, A)}$ sea igual a 1. Identifica la figura resultante.

Solución:

Si $P(x, y)$ es un punto del lugar geométrico, tenemos que:

$\frac{dist(P,A)}{dist(P,B)} = 1 \quad \Rightarrow \quad dist(P,A) = dist(P,B)$

$\sqrt{(x+1)^2 + y^2} = \sqrt{(x-1)^2 + y^2} \quad \Rightarrow \quad (x+1)^2 + y^2 = (x-1)^2 + y^2$

$x^2 + 2x + 1 + y^2 = x^2 - 2x + 1 + y^2$

$4x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$

Es la ecuación del eje Y, que en este caso es la mediatriz del segmento AB.