Ejercicio nº 1.-

Halla el dominio de definición de las funciones siguientes:

a) $y = \dfrac{1}{x^2 + 4}$

b) $y = \dfrac{1}{\sqrt{3 - x}}$

Solución:

a) $x^2 + 4 \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R} \;\rightarrow\;$ Dominio $= \mathbb{R}$

b) $3 - x > 0 \;\Rightarrow\; x < 3 \;\rightarrow\;$ Dominio $= (-\infty, 3)$

Ejercicio nº 2.-

Halla los límites siguientes y representa gráficamente la información que obtengas:

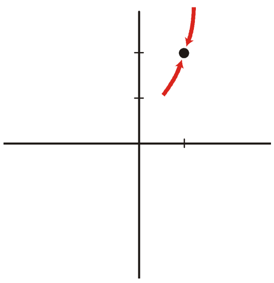
a) $\lim\limits_{x \to 1} \left(-x^2 + 3x^3\right)$

b) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{-1}{2x - 6}$

c) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 4x + 4}$

Solución:

a) $\lim\limits_{x \to 1} \left(-x^2 + 3x^3\right) = 2$

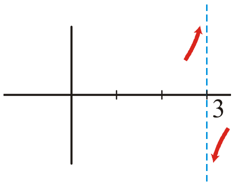


b) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{-1}{2x - 6} = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{-1}{2(x - 3)}$

Hallamos los límites laterales:

$$\lim_{x \to 3^-} \frac{-1}{2x - 6} = +\infty$$

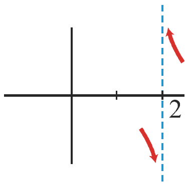
$$\lim_{x \to 3^+} \frac{-1}{2x - 6} = -\infty$$



c) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 4x + 4} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x-2)(x+2)}{(x-2)^2} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x+2}{x-2}$

Hallamos los límites laterales:

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{x+2}{x-2} = -\infty$$
$$\lim_{x \to 2^+} \frac{x+2}{x-2} = +\infty$$



Ejercicio nº 3.-

Calcula los siguientes límites y representa las ramas que obtengas:

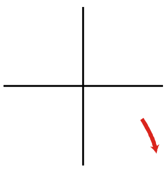
a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (3 - x)^3$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^2 + 3x}{x^2 - 1}$

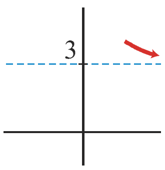
c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^3}{x + 1}$

Solución:

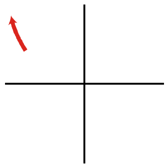
a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (3 - x)^3 = -\infty$



b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^2 + 3x}{x^2 - 1} = 3$



c) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^3}{x+1} = +\infty$



Ejercicio nº 4.-

Halla la derivada de las funciones:

a) $f(x) = \left(\dfrac{4x^6}{3} - 2x + 5 \right) e^{3x-1}$

b) $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1} + arctg\, x$

c) $f(x) = \sqrt{2x - 3x^4}$

Solución:

a) $f'(x) = \left(\dfrac{24x^5}{3} - 2 \right) \cdot e^{3x-1} + \left(\dfrac{4x^6}{3} - 2x + 5 \right) \cdot 3e^{3x-1} = \left(4x^6 + 8x^5 - 6x + 13\right) e^{3x-1}$

b) $f'(x) = \dfrac{2\left(x^2+1\right) - 2x \cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^2} + \dfrac{1}{1+x^2} = \dfrac{2x^2 + 2 - 4x^2}{\left(x^2+1\right)^2} + \dfrac{1}{1+x^2} = \dfrac{-2x^2+2}{\left(x^2+1\right)^2} + \dfrac{1}{1+x^2} =$

$= \dfrac{-2x^2 + 2 + 1 + x^2}{\left(1+x^2\right)^2} = \dfrac{3 - x^2}{\left(1+x^2\right)^2}$

c) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{2x - 3x^4}} \cdot \left(2 - 12x^3\right) = \dfrac{2 - 12x^3}{2\sqrt{2x-3x^4}} = \dfrac{2\left(1 - 6x^3\right)}{2\sqrt{2x - 3x^4}} = \dfrac{1 - 6x^3}{\sqrt{2x - 3x^4}}$

Ejercicio nº 5.-

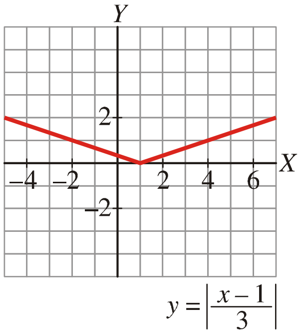
Representa gráficamente:

a) $y = \left| \dfrac{x-1}{3} \right|$

b) $y = 2^{-x}$

Solución:

a) Sobre la recta $y = \dfrac{x-1}{3}$, hallamos su valor absoluto :

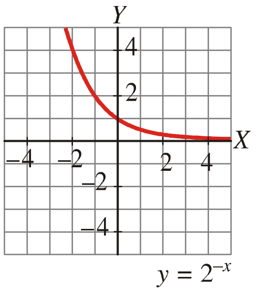


$y = \left| \frac{x-1}{3} \right|$

b) Hacemos una tabla de valores:

x	–2	–1	0	1	2
y	4	2	1	1/2	1/4

La gráfica sería:



$y = 2^{-x}$

Ejercicio nº 6.-

Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x \le 1 \\ \dfrac{3x-1}{2} & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

a) Estudia su continuidad.
b) Represéntala gráficamente.

Solución:

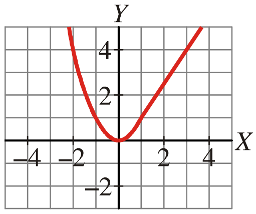
a) • Si $x \neq 1$, la función es continua.
• Si $x = 1$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \left(x^2\right) = 1 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \left(\dfrac{3x-1}{2}\right) = 1 \\ f(1) = 1 \end{array}\right\} \text{ También es continua en } x = 1.$$

Es una función continua.

b) • Si $x \le 1$, es un trozo de parábola.

- Si $x > 1$, es un trozo de recta.
- La gráfica es:



Ejercicio nº 7.-

Una barra de hierro dulce de 30 cm de larga a 0 °C se calienta, y su dilatación viene dada por una función lineal *l* = *a* + *bt*, donde *l* es la longitud (en cm) y *t* es la temperatura (en °C).

a) Halla la expresión analítica de *l*, sabiendo que *l*(1)=30,0005 cm y que *l*(3)=30,0015 cm.
b) Representa gráficamente la función obtenida.

Solución:

a) $\left.\begin{array}{l} l(1) = 30{,}0005 \quad \Rightarrow \quad a + b = 30{,}0005 \\ l(3) = 30{,}0015 \quad \Rightarrow \quad a + 3b = 30{,}0015 \end{array}\right\}$

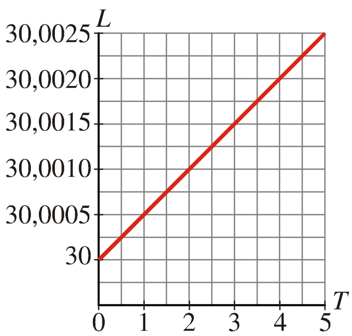
Restando a la segunda ecuación la primera, queda:

$2b = 0{,}0010 \quad \Rightarrow \quad b = 0{,}0005 \quad \rightarrow \quad a = 30{,}0005 - b = 30{,}0005 - 0{,}0005 = 30$

Por tanto:

$l = 30 + 0{,}0005t$

b)



$l = 30 + 0{,}0005t$

Ejercicio nº 8.-

Aplicando la definición de derivada, calcula $f'(1)$ siendo $f(x) = \dfrac{x^2}{3}$.

Solución:

$$f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{(1+h)^2}{3} - \frac{1}{3}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1+h^2+2h}{3} - \frac{1}{3}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1+h^2+2h-1}{3}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^2+2h}{3}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2+2h}{3h} = \lim_{h\to 0} \frac{h(h+2)}{3h} = \lim_{h\to 0} \frac{h+2}{3} = \frac{2}{3}$$

Ejercicio nº 9.-

Obtén la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x) = 2x^3 + x$ en el punto de abscisa $x = -1$.

Solución:

- $f'(x) = 6x^2 + 1$
- La pendiente de la recta es $l'(-1) = 7$
- Cuando $x = -1,\ y = -3.$
- La recta será:

$$y = -3 + 7(x+1) = -3 + 7x + 7 = 7x + 4$$

Ejercicio nº 10.-

Estudia el crecimiento y el decrecimiento de la siguiente función:

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x}{4}$$

Solución:

- $f'(x) = \dfrac{2x-3}{4}$

- Estudiamos el signo de la derivada:

$$f'(x) = 0 \;\Rightarrow\; 2x - 3 = 0 \;\Rightarrow\; x = \frac{3}{2}$$

$$f'(x) > 0 \;\Rightarrow\; \frac{2x-3}{4} > 0 \;\Rightarrow\; 2x - 3 > 0 \;\Rightarrow\; x > \frac{3}{2}$$

$$f'(x) < 0 \;\Rightarrow\; \frac{2x-3}{4} < 0 \;\Rightarrow\; 2x - 3 < 0 \;\Rightarrow\; x < \frac{3}{2}$$

La función es decreciente en $\left(-\infty,\ \frac{3}{2}\right)$ y creciente en $\left(\frac{3}{2},\ +\infty\right)$. Tiene un mínimo en $x = \frac{3}{2}$.

Ejercicio nº 11.-

Halla las asíntotas de la siguiente función y sitúa la curva respecto a ellas:

$$f(x)=\frac{2x^2+1}{x^2-1}$$

Solución:

- Asíntota horizontal: $y=2$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2+1}{x^2-1}=2$$

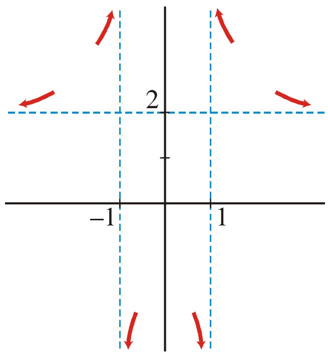
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2+1}{x^2-1}=2$$

- Asíntotas verticales: $x=-1$; $x=1$

$$\lim_{x\to1^-}\frac{2x^2+1}{x^2-1}=-\infty;\qquad \lim_{x\to1^+}\frac{2x^2+1}{x^2-1}=+\infty$$

$$\lim_{x\to-1^-}\frac{2x^2+1}{x^2-1}=+\infty;\qquad \lim_{x\to-1^+}\frac{2x^2+1}{x^2-1}=-\infty$$

- Representación:



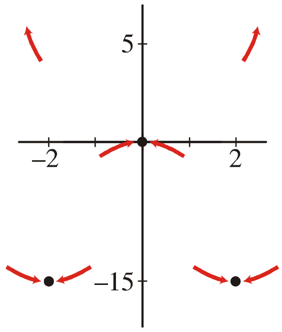
<u>Ejercicio nº 12.-</u>

Determina los puntos de tangente horizontal de la función $f(x)=x^4-8x^2+1$. Represéntalos gráficamente.

Solución:

- $f'(x)=4x^3-16x=4x(x^2-4)=0\ \to \begin{cases} x=0\to\ \text{Punto: } (0,1)\\ x=-2\to\ \text{Punto: } (-2,-15)\\ x=2\to\ \text{Punto: } (2,-15)\end{cases}$

- $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^4-8x^2+1)=+\infty;\qquad \lim\limits_{x\to+\infty}(x^4-8x^2+1)=+\infty$



Mínimo en $(-2, -15)$ y en $(2, -15)$, y máximo en $(0, 1)$.

Ejercicio nº 13.-

a) Representa gráficamente la función:

$$\boldsymbol{f(x) = (x-1)^2 (x+8)}$$

b) A partir de la gráfica, averigua el dominio de *f (x)*, estudia su continuidad y di cuáles son los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función.

Solución:

a) • $\lim\limits_{x\to-\infty} (x-1)^2(x+8) = -\infty; \qquad \lim\limits_{x\to+\infty} (x-1)^2(x+8) = +\infty$

• Puntos de corte con los ejes:

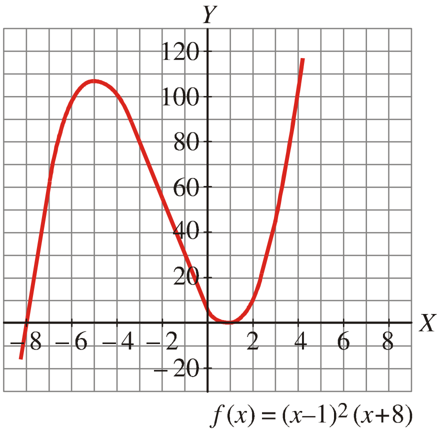
Con el eje $X \;\rightarrow\; (x-1)^2(x+8) = 0 \;\rightarrow\; \begin{cases} x = 1 & \rightarrow \text{ Punto } (1, 0) \\ x = -8 & \rightarrow \text{ Punto } (-8, 0) \end{cases}$

Con el eje $Y \;\rightarrow\; x = 0 \;\rightarrow\; y = 8 \;\rightarrow\;$ Punto $(0, 8)$

• Puntos singulares:

$$f'(x) = 2(x-1)(x+8) + (x-1)^2 = (x-1)[2(x+8)+(x-1)] =$$
$$= (x-1)(2x+16+x-1) = (x-1)(3x+15) = 0 \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 & \rightarrow \text{ Punto } (1, 0) \\ x = -5 & \rightarrow \text{ Punto } (-5, 108) \end{cases}$$

• Gráfica:



b) • Dominio = $\mathbb{R}$

• Es una función continua.

• Creciente en $(-\infty, -5)$ y en $(1, +\infty)$, y decreciente en $(-5, 1)$.

<u>Ejercicio nº 14.-</u>

a) Representa gráficamente la función:

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{2x^2 + 4x + 2}{x^2 + 2x - 3}}$$

b) A partir de la gráfica, estudia la continuidad y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de $f(x)$.

Solución:

a) • Dominio:

$$x^2 + 2x - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2} \quad \to \quad \begin{cases} x = -3 \\ x = 1 \end{cases}$$

Dominio $= \mathbb{R} - \{-3, 1\}$

• Puntos de corte con los ejes:

Con el eje $X \to y = 0 \to 2x^2 + 4x + 2 = 0$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16-16}}{4} = -1 \quad \to \quad \text{Punto } (-1,\ 0)$$

Con el eje $Y \to x = 0 \to y = -\frac{2}{3} \to$ Punto $\left(0,\ \frac{-2}{3}\right)$

• Asíntotas verticales: $x = -3$ y $x = 1$

$$\lim_{x \to -3^-} f(x) = \lim_{x \to -3^-} \frac{2x^2 + 4x + 2}{(x+3)(x-1)} = +\infty; \qquad \lim_{x \to -3^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = -\infty; \qquad \lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$$

• Asíntota horizontal: $y=2$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=2; \quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=2$$

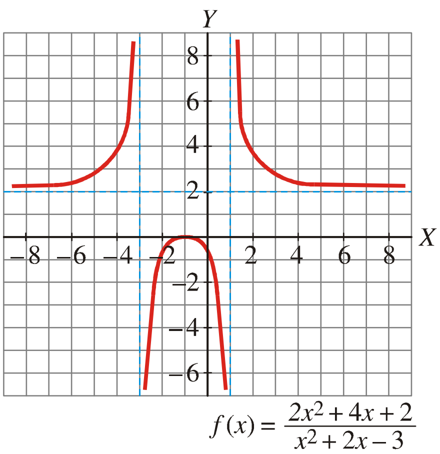
• Puntos singulares:

$$f'(x)=\frac{(4x+4)(x^2+2x-3)-(2x^2+4x+2)(2x+2)}{(x^2+2x-3)^2}=$$

$$=\frac{(2x+2)(2x^2+4x-6-2x^2-4x-2)}{(x^2+2x-3)^2}=\frac{-8(2x+2)}{(x^2+2x-3)^2}=\frac{-16(x+1)}{(x^2+2x-3)^2}$$

$f'(x)=0 \quad \Rightarrow \quad x=-1 \quad \rightarrow \quad$ Punto $(-1,\ 0)$

• Gráfica:



b) • Continuidad:

Si $x\neq-3$ y $x\neq1$, es continua.
Es discontinua en $x=-3$ y en $x=1$, pues tiene dos ramas infinitas (asíntotas verticales).

• Creciente en $(-\infty,-3)\cup(-3,-1)$ y decreciente en $(-1,1)\cup(1,+\infty)$.