Ejercicio nº 1.-

Halla el dominio de definición de las siguientes funciones:

a) $y = \dfrac{3}{(x-5)^2}$

b) $y = \sqrt{2x-4}$

Solución:

a) $(x-5)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 5 \quad \rightarrow \quad \text{Dominio} \; = \mathbb{R} - \{5\}$

b) $2x - 4 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad 2x \geq 4 \quad \Rightarrow \quad x \geq 2 \quad \rightarrow \quad \text{Dominio } [2, +\infty)$

Ejercicio nº 2.-

Calcula el límite cuando $x \rightarrow 3$ de cada una de las siguientes funciones y representa los resultados obtenidos en cada caso:

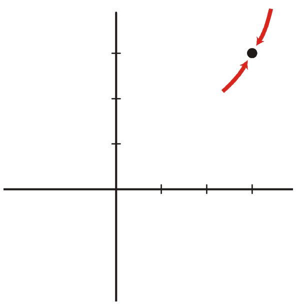
a) $f(x) = \dfrac{x^3}{3} - 2x$

b) $f(x) = \dfrac{x^2}{x-3}$

c) $f(x) = \dfrac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 9}$

Solución:

a) $\lim\limits_{x \to 3} \left(\dfrac{x^3}{3} - 2x \right) = 9 - 6 = 3$

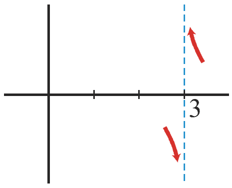


b) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2}{x-3}$

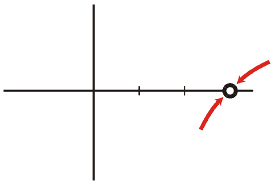
Hallamos los límites laterales:

$\lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{x^2}{x-3} = -\infty$

$\lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{x^2}{x-3} = +\infty$



c) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 9} = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{(x-3)^2}{(x-3)(x+3)} = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x-3}{x+3} = 0$



<u>Ejercicio nº 3.-</u>

Halla los límites siguientes y representa las ramas que obtengas:

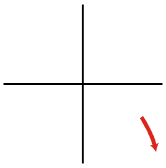
a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(-x^3 + 2x^2\right)$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x+1}{x^2 - 4}$

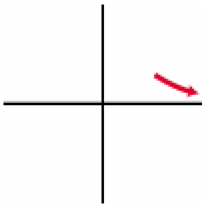
c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x+1}{x^2 - 4}$

Solución:

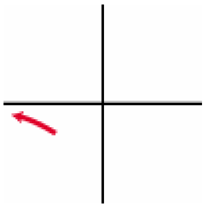
a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(-x^3 + 2x^2\right) = -\infty$



b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x+1}{x^2 - 4} = 0$



c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x+1}{x^2 - 4} = 0$



Ejercicio nº 4.-

Halla la derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 4x^5 - \dfrac{2x}{3} + log_3 x$

b) $f(x) = (x^2 - 3x)e^x$

c) $f(x) = sen\left(\dfrac{x-1}{x^2+1}\right)$

Solución:

a) $f'(x) = 20x^4 - \dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{x\,ln3}$

b) $f'(x) = (2x-3)e^x + (x^2-3x)e^x = e^x(2x-3+x^2-3x) = e^x(x^2-x-3)$

c) $f'(x) = cos\left(\dfrac{x-1}{x^2+1}\right)\cdot\dfrac{x^2+1-(x-1)2x}{(x^2+1)^2} = cos\left(\dfrac{x-1}{x^2+1}\right)\cdot\dfrac{x^2+1-2x^2+2x}{(x^2+1)^2} =$

$= cos\left(\dfrac{x-1}{x^2+1}\right)\cdot\dfrac{-x^2+2x+1}{(x^2+1)^2} = \dfrac{-x^2+2x+1}{(x^2+1)^2}\cdot cos\left(\dfrac{x-1}{x^2+1}\right)$

Ejercicio nº 5.-

Representa las gráficas de las funciones:

a) $y = 1 - \dfrac{x^2}{4}$

b) $y = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{x+1}$

Solución:

a) • El vértice de la parábola está en $(0, 1)$

• Puntos de corte con los ejes:

Con el eje $X \rightarrow \quad y = 0 \quad \rightarrow \quad 1 - \dfrac{x^2}{4} = 0 \quad \Rightarrow \quad 4 - x^2 = 0 \quad \Rightarrow x = \pm 2 \quad \rightarrow$

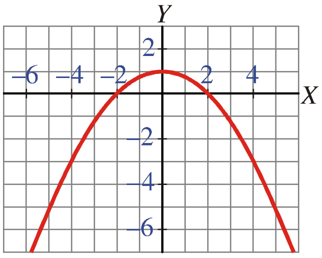
$\rightarrow$ Puntos $(-2,\ 0)$ y $(2,\ 0)$

Con el eje $Y \rightarrow \quad x = 0 \quad \rightarrow \quad y = 1 \quad \rightarrow$ Punto $(0, 1)$

• Hallamos algún otro punto:

x	-4	4
y	-3	-3

- La gráfica sería:

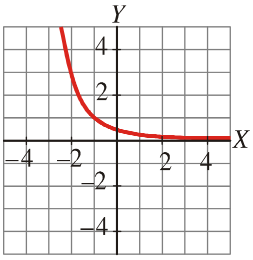


$y = 1 - \frac{x^2}{4}$

b) • Hacemos una tabla de valores:

x	-3	-2	-1	0	1
y	9	3	1	$1/3$	$1/9$

- La gráfica sería:



$y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}$

<u>Ejercicio nº 6.-</u>

a) Estudia la continuidad de la función:

$$f(x) = \begin{cases} 2x+3 & \text{si} \quad x \le -2 \\ x^2 & \text{si} \quad x > -2 \end{cases}$$

b) Represéntala gráficamente.

Solución:

a) • Si $x \neq -2$, la función es continua.

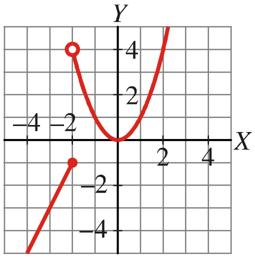
• Si $x = -2$,

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -2^-} (2x+3) = -1 \\ \lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -2^+} (x^2) = 4 \end{array}\right\} \text{Son distintos} \rightarrow \text{La función es discontinua en } x = -2$$

b) • Si $x \le -2$, es un trozo de recta.

• Si $x > -2$ es un trozo de parábola.

• La gráfica es:



Ejercicio nº 7.-

Una cierta población crece de acuerdo con la ecuación $y = 1 + k\,e^{at}$ donde t es el tiempo en meses e y es el número de individuos en miles.

a) Calcula k y a sabiendo que $y(0) = 1{,}2$ y que $y(10) = 1 + 0{,}2e \approx 1{,}54$
b) Representa la función obtenida con los valores de k y a que has hallado.

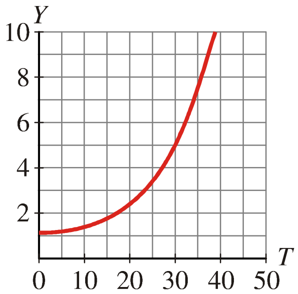
Solución:

a) $y(0) = 1{,}2 \quad \Rightarrow \quad 1{,}2 = 1 + k \cdot 1 \quad \Rightarrow \quad k = 0{,}2$

$y(10) = 1 + 0{,}2e \quad \Rightarrow \quad 1 + 0{,}2e = 1 + 0{,}2e^{10a} \quad \Rightarrow \quad 10a = 1 \quad \Rightarrow \quad a = 0{,}1$

Por tanto : $y = 1 + 0{,}2e^{0{,}1t}$

b)



$y = 1 + 0{,}2e^{0{,}1t}$

Ejercicio nº 8.-

Calcula, utilizando la definición de derivada, $f'(3)$ para la función $f(x) = \dfrac{5x - 1}{2}$.

Solución:

$$f'(3) = \lim_{h \to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{5(3+h)-1}{2} - 7}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{15+5h-1}{2} - 7}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{5h+14}{2} - 7}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{5h+14-14}{2}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{5h}{2}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{5h}{2h} = \frac{5}{2}$$

Ejercicio nº 9.-

Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x) = 2x^2 + 3x - 1$ en el punto de abscisa $x = 1$.

Solución:

- $f'(x) = 4x + 3$
- La pendiente de la recta es $f'(1) = 7$.
- Cuando $x = 1$, $y = 4$.
- La recta será:

$$y = 4 + 7(x - 1) = 4 + 7x - 7 = 7x - 3$$

Ejercicio nº 10.-

Dada la función:

$$f(x) = 4x^3 - 6x + 1$$

a) ¿Es creciente o decreciente en $x = 0$? ¿Y en $x = 1$?
b) Halla los tramos en los que la función crece y en los que decrece.

Solución:

- $f'(x) = 12x^2 - 6$

a) $f'(0) = -6 < 0 \quad \Rightarrow \quad$ Decreciente en $x = 0$
$f'(1) = 6 > 0 \quad \Rightarrow \quad$ Creciente en $x = 1$

b) Estudiamos el signo de la derivada:

$$f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad 12x^2 - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad 12x^2 = 6 \quad \Rightarrow \quad x^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$f'(x) > 0 \quad \Rightarrow \quad 12x^2 - 6 > 0 \quad \Rightarrow \quad x \in \left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$$

$$f'(x) < 0 \quad \Rightarrow \quad 12x^2 - 6 < 0 \quad \Rightarrow \quad x \in \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

La función es decreciente en $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ y creciente en $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \infty\right)$. Tiene un mínimo en $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, y un máximo en $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ejercicio nº 11.-

Obtén las asíntotas de la siguiente función y representa gráficamente la posición de la curva respecto a ellas:

$$f(x) = \frac{x^2+2}{x+1}$$

Solución:

- Asíntota vertical: $x = -1$

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{x^2+2}{x+1} = -\infty; \quad \lim_{x\to -1^+} \frac{x^2+2}{x+1} = +\infty$$

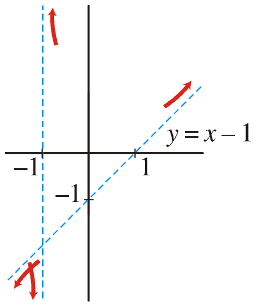
- Asíntota oblicua:

$$\frac{x^2+2}{x+1} = x-1+\frac{3}{x+1} \quad \Rightarrow \quad y = x-1 \text{ es asíntota oblicua.}$$

Si $x \to +\infty$, $\frac{3}{x+1} > 0 \quad \Rightarrow$ La curva está por encima de la asíntota.

Si $x \to -\infty$, $\frac{3}{x+1} < 0 \quad \Rightarrow$ La curva está por debajo de la asíntota

- Representación:



<u>Ejercicio nº 12.-</u>

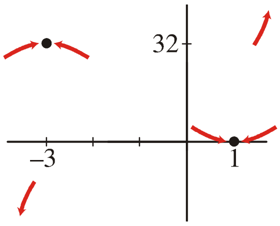
Halla y representa gráficamente los puntos de tangente horizontal de la siguiente función:

$$f(x) = (x-1)^2(x+5)$$

Solución:

- $f'(x) = 2(x-1)(x+5)+(x-1)^2 = (x-1)[2(x+5)+(x-1)] =$
$= (x-1)(2x+10+x-1) = (x-1)(3x+9) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 & \rightarrow \quad \text{Punto}: \quad (1,\ 0) \\ x = -3 & \rightarrow \quad \text{Punto}: \quad (-3,\ 32) \end{cases}$

- $\lim_{x\to -\infty} (x-1)^2(x+5) = -\infty; \quad \lim_{x\to +\infty} (x-1)^2(x+5) = +\infty$



Máximo en $(-3, 32)$ y mínimo en $(1, 0)$.

<u>Ejercicio nº 13.-</u>

a) Representa la gráfica de la función:

$$\boldsymbol{f(x) = 4x^2 - 2x^4 + 2}$$

b) Sobre la gráfica anterior, estudia el dominio de $f(x)$, su continuidad y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función.

Solución:

a) • $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(4x^2 - 2x^4 + 2\right) = -\infty; \qquad \lim\limits_{x \to +\infty} \left(4x^2 - 2x^4 + 2\right) = -\infty$

• Puntos de corte con los ejes:

Con el eje $X \;\rightarrow\; 4x^2 - 2x^4 + 2 = 0 \;\rightarrow\; -2z^2 + 4z + 2 = 0$ (siendo $z = x^2$) $\rightarrow$

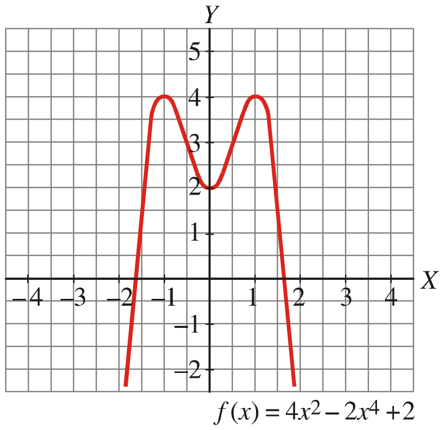
$$\rightarrow\; z = \frac{-4 \pm \sqrt{16+16}}{-4} \;\rightarrow\; \begin{cases} z = -0,4 \;\text{ (no vale)} \\ z = \;2,4 \;\rightarrow\; \begin{cases} x = 1,55 \;\rightarrow\; \text{Punto } (1,55;\, 0) \\ x = -1,55 \;\rightarrow\; \text{Punto} (-1,55;\, 0) \end{cases} \end{cases}$$

Con el eje $Y \;\rightarrow\; x = 0 \;\rightarrow\; y = 2 \;\rightarrow\;$ Punto $(0, 2)$

• Puntos singulares:

$$f'(x) = 8x - 8x^3 = 8x\left(1 - x^2\right) = 0 \;\rightarrow\; \begin{cases} x = 0 \;\rightarrow \text{Punto}\,(0, 2) \\ x = -1 \rightarrow \text{Punto}\,(-1, 4) \\ x = 1 \;\rightarrow \text{Punto}\,(1, 4) \end{cases}$$

• Gráfica:



b) • Dominio $= \mathbb{R}$

- Es una función continua.

- Creciente en $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$ y decreciente en $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$.

Ejercicio nº 14.-

a) Representa la gráfica de la función:

$$f(x) = \frac{x^3 - 4}{x^2}$$

b) Ayúdate de la gráfica para estudiar la continuidad y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de $f(x)$.

Solución:

a) • Dominio $= \mathbb{R} - \{0\}$

• Puntos de corte con los ejes:

Con el eje $X \rightarrow y = 0 \rightarrow x^3 - 4 = 0 \rightarrow x = \sqrt[3]{4} \approx 1{,}6 \rightarrow$ Punto $(1{,}6;\ 0)$

Con el eje Y: No corta el eje Y, pues $x = 0$ no está en el dominio.

• Asíntotas verticales: $x = 0$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$$

• Asíntota oblicua:

$$\frac{x^3 - 4}{x^2} = x - \frac{4}{x^2} \quad \Rightarrow \quad y = x \text{ es asíntota oblicua.}$$

Si $x \rightarrow -\infty$, $\dfrac{-4}{x^2} < 0 \quad \Rightarrow$ La curva está por debajo de la asíntota.

Si $x \rightarrow +\infty$, $\dfrac{-4}{x^2} < 0 \quad \Rightarrow$ La curva está por debajo de la asíntota.

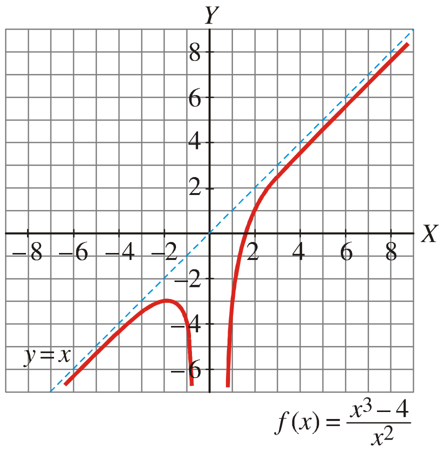
• Puntos singulares:

$$f'(x) = \frac{3x^2 \cdot x^2 - (x^3 - 4) \cdot 2x}{x^4} = \frac{3x^4 - 2x^4 + 8x}{x^4} =$$

$$= \frac{x^4 + 8x}{x^4} = \frac{x(x^3 + 8)}{x^4} = \frac{x^3 + 8}{x^3}$$

$f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x^3 + 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -2 \quad \rightarrow \quad$ Punto $(-2,\ -3)$

• Gráfica:



b) • Continuidad:

Si $x \neq 0$, es continua.
Es discontinua en $x = 0$, pues tiene una rama infinita (asíntota vertical).

• Creciente en $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$ y decreciente en $(-2, 0)$.