Ejercicio nº 1.-

Halla el dominio de definición de las funciones:

a) $y = \dfrac{x}{x^2 - 4}$

b) $y = \sqrt{-2x}$

Solución:

a) $x^2 - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{4} \quad \Rightarrow \quad x = \pm 2 \quad \rightarrow \quad \text{Dominio } = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$

b) $-2x \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x \leq 0 \quad \rightarrow \quad \text{Dominio} = (-\infty, 0]$

Ejercicio nº 2.-

Calcula los siguientes límites y representa los resultados que obtengas:

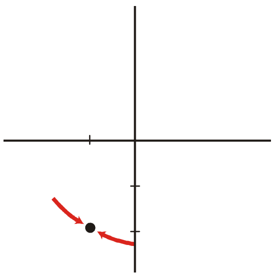
a) $\lim\limits_{x \to -1} \left(x^2 - 3\right)$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2 - x}$

c) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 + x - 2}{x^2 - 2x + 1}$

Solución:

a) $\lim\limits_{x \to -1} \left(x^2 - 3\right) = 1 - 3 = -2$

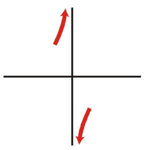


b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2 - x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x(x-1)}$

Hallamos los límites laterales:

$\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x^2 - x} = +\infty$

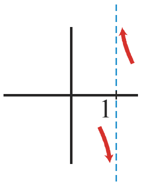
$\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x^2 - x} = -\infty$



c) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 + x - 2}{x^2 - 2x + 1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x+2)(x-1)}{(x-1)^2} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x+2}{x-1}$

Hallamos los límites laterales:

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x+2}{x-1} = -\infty$$
$$\lim_{x \to 1^+} \frac{x+2}{x-1} = +\infty$$



<u>Ejercicio nº 3.-</u>

Calcula los siguientes límites y representa el resultado que obtengas:

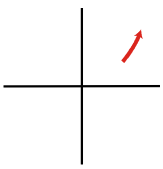
a) $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2}{3} - 2x \right)$

b) $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^4 - 3x}{x^4 + 1}$

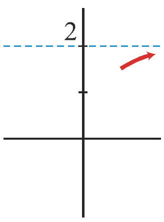
c) $\displaystyle \lim_{x \to -\infty} \frac{2x^4 - 3x}{x^4 + 1}$

Solución:

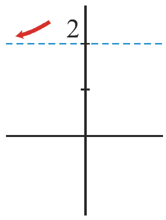
a) $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2}{3} - 2x \right) = +\infty$



b) $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^4 - 3x}{x^4 + 1} = 2$



c) $\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^4-3x}{x^4+1}=2$



Ejercicio nº 4.-

Halla la función derivada de cada una de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\left(-x^7+\frac{3}{4}x-1\right)\cdot \ln x$

b) $f(x)=\frac{4x^3-3}{x^2-1}$

c) $f(x)=e^{\sqrt{7x^4-3}}$

Solución:

a) $f'(x)=\left(-7x^6+\frac{3}{4}\right)\ln x+\left(-x^7+\frac{3}{4}x-1\right)\cdot\frac{1}{x}=\left(-7x^6+\frac{3}{4}\right)\ln x-x^6+\frac{3}{4}-\frac{1}{x}$

b) $f'(x)=\frac{12x^2\left(x^2-1\right)-\left(4x^3-3\right)2x}{\left(x^2-1\right)^2}=\frac{12x^4-12x^2-8x^4+6x}{\left(x^2-1\right)^2}=\frac{4x^4-12x^2+6x}{\left(x^2-1\right)^2}$

c) $f'(x)=e^{\sqrt{7x^4-3}}\cdot\frac{\left(28x^3\right)}{2\sqrt{7x^4-3}}=\frac{14x^3\cdot e^{\sqrt{7x^4-3}}}{\sqrt{7x^4-3}}$

Ejercicio nº 5.-

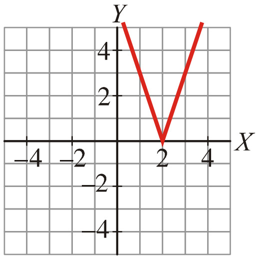
Representa gráficamente las siguientes funciones:

a) $y=|3x-6|$

b) $y=2^{x-1}$

Solución:

a) Sobre la recta $y=3x-6$, hallamos su valor absoluto:

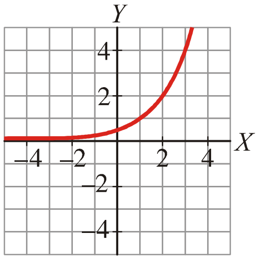


$y = |3x - 6|$

b) Hacemos una tabla de valores:

x	-1	0	1	2	3
y	$1/4$	$1/2$	1	2	4

La gráfica sería:



$y = 2^{x-1}$

Ejercicio nº 6.-

a) Estudia la continuidad de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3 & \text{si} \quad x \le 2 \\ 3^{x-2} & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

b) Represéntala gráficamente.

Solución:

a) • Si $x \neq 2$, la función es continua.

• Si $x = 2$:

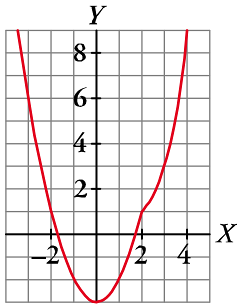
$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} \left(x^2 - 3\right) = 1 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} \left(3^{x-2}\right) = 1 \\ f(2) = 1 \end{array}\right\} \text{ También es continua en } x = 2.$$

Es una función continua.

b) • Si $x \le 2$, es un trozo de parábola.

• Si $x > 2$, es un trozo de función exponencial.

• La gráfica es:



Ejercicio nº 7.-

Un tendero tiene 20 kg de manzanas que hoy venderá a 40 céntimos de euro/kg. Cada día que pasa se estropeará 1 kg y el precio aumentará 10 céntimos de euro/kg.

a) Escribe la ecuación que nos da el beneficio obtenido en la venta, *y*, en función de los días que pasan hasta que vende las manzanas, *x*.
b) Representa la función obtenida, considerando que *x* puede tomar cualquier valor $x \geq 0$.

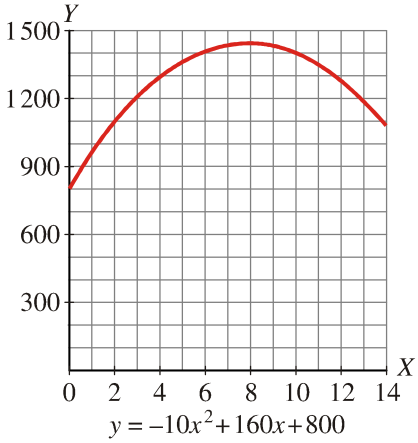
Solución:

a) Si pasan x días:

Tendrá $(20–x)$ kg y los venderá a $(40+10x)$ céntimos de euro cada uno.
Por tanto, obtendrá un beneficio de:

$$y = (20 - x)(40 + 10x) = 800 + 200x - 40x - 10x^2$$
$$y = -10x^2 + 160x + 800$$

b)



Ejercicio nº 8.-

Dada la función:

$$f(x) = x^2 - 2$$

Calcula $f'(-1)$, utilizando la definición de derivada.

Solución:

$$f'(-1) = \lim_{h\to 0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(-1+h)^2-2-(-1)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1+h^2-2h-2+1}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{h^2-2h}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h(h-2)}{h} = \lim_{h\to 0}(h-2) = -2$$

Ejercicio nº 9.-

Escribe la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x) = x - 2x^2$ que es paralela a:

$$y = -7x - 2$$

Solución:

- $f'(x) = 1 - 4x$
- La pendiente de la recta es $m = -7 \quad \Rightarrow \quad 1 - 4x = -7 \quad \Rightarrow \quad x = 2$
- Cuando $x = 2,\ y = -6.$
- La recta será:

$$y = -6 - 7(x-2) = -6 - 7x + 14 = -7x + 8$$

Ejercicio nº 10.-

Consideramos la función:

$$f(x) = -x^4 + x^2$$

a) ¿Crece o decrece en $x = -1$? ¿Y en $x = 1$?
b) Halla los tramos en los que la función es creciente y en los que es decreciente.

Solución:

a) $f'(x) = -4x^3 + 2x$

$f'(1) = -2 < 0 \quad \Rightarrow \quad$ Decreciente en $x = 1$

$f'(-1) = 2 > 0 \quad \Rightarrow \quad$ Creciente en $x = -1$

b) Estudiamos el signo de la derivada:

$$f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad -4x^3 + 2x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0, \quad x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$f'(x) > 0 \quad \Rightarrow \quad -4x^3 + 2x > 0 \quad \Rightarrow \quad x \in \left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$f'(x) < 0 \quad \Rightarrow \quad -4x^3 + 2x < 0 \quad \Rightarrow \quad x \in \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) \cup \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$$

La función decrece en $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},0\right) \cup \left(\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$ y crece en $\left(-\infty,\frac{-\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Tiene un mínimo en $x=0$ y dos máximos en $x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ y $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ejercicio nº 11.-

Dada la función:

$$f(x)=\frac{4x^2-3}{x}$$

halla sus asíntotas y representa la posición de la curva respecto a ellas.

Solución:

- Asíntota vertical: $x=0$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{4x^2-3}{x}=+\infty; \quad \lim_{x\to 0^+}\frac{4x^2-3}{x}=-\infty$$

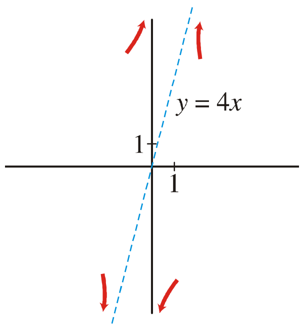
- Asíntota oblicua:

$\frac{4x^2-3}{x}=4x-\frac{3}{x} \quad \Rightarrow \quad y=4x$ es asíntota oblicua.

Si $x\to+\infty$, $\frac{-3}{x}<0 \quad \Rightarrow$ La curva está por debajo de la asíntota.

Si $x\to-\infty$, $\frac{-3}{x}>0 \quad \Rightarrow$ La curva está por encima de la asíntota.

- Representación:



Ejercicio nº 12.-

Halla y representa gráficamente los puntos de tangente horizontal de la función:

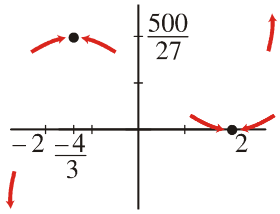
$$f(x)=x^3-x^2-8x+12$$

Solución:

- $f'(x) = 3x^2 - 2x - 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{2 \pm \sqrt{4+96}}{6} = \dfrac{2 \pm 10}{6} \quad \to \quad \begin{cases} x = 2 \\ x = \dfrac{-8}{6} = \dfrac{-4}{3} \end{cases}$

  Puntos: $(2,\ 0)$ y $\left(-\dfrac{4}{3},\ \dfrac{500}{27}\right)$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^3 - x^2 - 8x + 12\right) = +\infty; \qquad \lim\limits_{x \to -\infty} \left(x^3 - x^2 - 8x + 12\right) = -\infty$



Máximo en $\left(\dfrac{-4}{3},\ \dfrac{500}{27}\right)$ y mínimo en $(2,\ 0)$.

Ejercicio nº 13.-

a) Dibuja la gráfica de la función:

$$\boldsymbol{f(x) = 2x^4 - 4x^2 + 1}$$

b) Ayúdate de la gráfica para estudiar los siguientes aspectos de *f(x)* : dominio, continuidad e intervalos de crecimiento y de decrecimiento.

Solución:

a) • $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(2x^4 - 4x^2 + 1\right) = +\infty; \qquad \lim\limits_{x \to +\infty} \left(2x^4 - 4x^2 + 1\right) = +\infty$

- Puntos de corte con los ejes:

  Con el eje $X \to 2x^4 - 4x^2 + 1 = 0 \to 2z^2 - 4z + 1 = 0$ (siendo $z = x^2$)

$$z = \frac{4 \pm \sqrt{16-8}}{4} = \frac{4 \pm \sqrt{8}}{4} = \frac{4 \pm 2\sqrt{2}}{4} = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{2} \quad \to \quad \begin{cases} z = 1{,}7 \\ z = 0{,}3 \end{cases}$$

$$z = 1{,}7 \quad \to \quad \begin{cases} x_1 = -1{,}3 \quad \to \quad \text{Punto } (-1{,}3;\ 0) \\ x_2 = 1{,}3 \quad \to \quad \text{Punto } (1{,}3;\ 0) \end{cases}$$

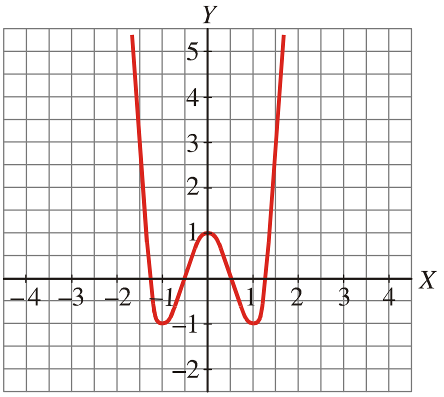
$$z = 0{,}3 \quad \to \quad \begin{cases} x_3 = 0{,}54 \quad \to \quad \text{Punto } (0{,}54; 0) \\ x_4 = -0{,}54 \quad \to \quad \text{Punto } (-0{,}54; 0) \end{cases}$$

  Con el eje $Y \quad \to \quad x = 0 \quad \to \quad y = 1 \quad \to$ Punto $(0,\ 1)$

- Puntos singulares:

$$f'(x) = 8x^3 - 8x = 8x(x^2 - 1) = 0 \quad \to \quad \begin{cases} x = 0 & \to \quad \text{Punto } (0,\ 1) \\ x = -1 & \to \quad \text{Punto } (-1,\ -1) \\ x = 1 & \to \quad \text{Punto } (1,\ -1) \end{cases}$$

- Gráfica:



$f(x) = 2x^4 - 4x^2 + 1$

b) • Dominio $= \mathbb{R}$

- Es una función continua.
- Decreciente en $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$ y creciente en $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$.

<u>Ejercicio nº 14.-</u>

a) Dibuja la gráfica de la función:

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 2x}}$$

b) Sobre la gráfica anterior, estudia la continuidad y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de $\boldsymbol{f(x)}$.

Solución:

a) • Dominio $= \mathbb{R} - \{0, 2\}$

- Puntos de corte con los ejes:

Con el eje $X \quad \to \quad y = 0 \quad \to \quad x^2 - 2x - 3 = 0 \quad \to \quad x = \dfrac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \dfrac{2 \pm 4}{2} \quad \to$

$$\to \begin{cases} x = -1 & \to \quad \text{Punto } (-1, 0) \\ x = 3 & \to \quad \text{Punto } (3, 0) \end{cases}$$

Con el eje *Y:* No corta al eje *Y*, pues $x = 0$ no está en el dominio.

- Asíntotas verticales: $x = 0$ y $x = 2$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{x^2-2x-3}{x(x-2)} = -\infty; \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2-2x-3}{x(x-2)} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{x^2-2x-3}{x(x-2)} = +\infty; \quad \lim_{x\to 2^+} \frac{x^2-2x-3}{x(x-2)} = -\infty$$

- Asíntota horizontal: $y = 1$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = 1; \qquad \lim_{x\to +\infty} f(x) = 1$$

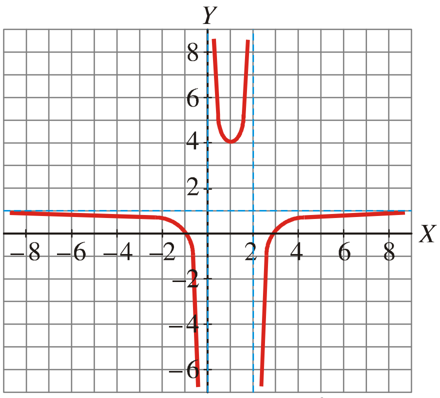
- Puntos singulares:

$$f'(x) = \frac{(2x-2)(x^2-2x)-(x^2-2x-3)(2x-2)}{(x^2-2x)^2} =$$

$$= \frac{(2x-2)(x^2-2x-x^2+2x+3)}{(x^2-2x)^2} = \frac{3(2x-2)}{(x^2-2x)^2} = \frac{6(x-1)}{(x^2-2x)^2}$$

$f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1 \quad \rightarrow \quad$ Punto $(1, 4)$

- Gráfica:



$f(x) = \dfrac{x^2-2x-3}{x^2-2x}$

b) • Continuidad:

Si $x \neq 0$ y $x \neq 2$, es continua.

Es discontinua en $x = 0$ y en $x = 2$, pues presenta dos ramas infinitas (asíntotas verticales).

- Decreciente en $(-\infty, 0) \cup (0, 1)$ y creciente en $(1, 2) \cup (2, +\infty)$.