

OPCIÓN A

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 1. Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Resuelve la ecuación $XA B - X C = 2 C$.

Solución:

La ecuación a resolver es: $XA B - X C = 2 C$

Por la propiedad distributiva del producto respecto de la resta de matrices:

$$X(A B - C) = 2 C \quad (a)$$

Llamamos $M = A B - C$

Obtengamos la matriz M ,

$$\begin{aligned} M = AB - C &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 \\ 0 \cdot 2 + 3 \cdot 1 & 0 \cdot (-1) + 3 \cdot 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Obtengamos la inversa de la matriz M , M^{-1}

$$|M| = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = 16 - 8 = 8 \neq 0 \quad \rightarrow \quad \exists M^{-1}$$

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{menores}} \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{adjuntos}} \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{traspuesta}} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{Y, } M^{-1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/8 & -2/8 \\ -4/8 & 4/8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/4 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

De lo obtenido en (a): $XM = 2 C$, multiplicando por M^{-1} por la derecha: $XM M^{-1} = 2 C M^{-1}$, operando:

$XI = 2 C M^{-1}$, por lo tanto: $X = 2 C M^{-1}$

Calculemos la matriz X ,

$$\begin{aligned} X = 2CM^{-1} &= 2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & -1/4 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \left(\frac{-1}{2}\right) & 0 \cdot \left(\frac{-1}{4}\right) + 1 \cdot \frac{1}{2} \\ -1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \left(\frac{-1}{2}\right) & -1 \cdot \left(\frac{-1}{4}\right) + 2 \cdot \frac{1}{2} \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2} - 1 & \frac{1}{4} + 1 \end{pmatrix} = \\ &= 2 \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{-3}{2} & \frac{5}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 5/2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{Solución: } X = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 5/2 \end{pmatrix}$$