OPCIÓN B

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 2. Dada la función $f(x)=\dfrac{x^2-8x+16}{x^2-8x+15}$, se pide:

a) Su dominio y puntos de corte con los ejes coordenados.
b) Ecuación de sus asíntotas verticales y horizontales.
c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
d) Máximos y mínimos locales.
e) Representación gráfica a partir de la información de los apartados anteriores.

Solución:
a) Dom f(x)

$$x^2-8x+15=0 \quad \rightarrow \quad x=\frac{-(-8)\pm\sqrt{(-8)^2-4\,.\,1\,.\,15}}{2\,.\,1}=\frac{8\pm\sqrt{64-60}}{2}=\frac{8\pm\sqrt{4}}{2}=\frac{8\pm 2}{2}=\left\langle\begin{array}{l} x_1=\dfrac{8+2}{2}=5 \\ x_2=\dfrac{8-2}{2}=3\end{array}\right.$$

Por tanto, Dom f(x) = $\Re \sim \{3\,,5\}$

Puntos de corte con los ejes coordenados.
Corte con el eje OX

$$f(x)=0 \quad \rightarrow \quad \frac{x^2-8x+16}{x^2-8x+15}= \quad \rightarrow \quad x^2-8x+16=0 \quad \rightarrow \quad x=\frac{-(-8)\pm\sqrt{(-8)^2-4\,.\,1\,.\,16}}{2\,.\,1}=$$

$$=\frac{8\pm\sqrt{64-64}}{2}=\frac{8\pm\sqrt{0}}{2}=\frac{8\pm 0}{2}=\frac{8}{2}=4 \quad \rightarrow \quad (4\,,0)$$

Corte con el eje OY

$$x=0 \quad \rightarrow \quad f(0)=\frac{0^2-8\,.\,0+16}{0^2-8\,.\,0+15}=\frac{16}{15} \quad \rightarrow \quad \left(0\,,\frac{16}{15}\right)$$

Por tanto, ***los puntos de corte con los ejes coordenados son: (4 , 0) y*** $\left(0\,,\dfrac{16}{15}\right)$.

b) Asíntotas verticales

Las posibles a.v. las buscamos entre los valores de x que anulan el denominador de f(x), es decir, x = 3 ó 5, según hemos obtenido en el apartado anterior.

x = 3

$$\lim_{x\to 3} f(x)=\lim_{x\to 3}\frac{x^2-8x+16}{x^2-8x+15}=\frac{3^2-8.3+16}{3^2-8.3+15}=\frac{1}{0}=\infty \quad \rightarrow \quad x=3 \text{ es a.v.}$$

x = 5

$$\lim_{x\to 5} f(x)=\lim_{x\to 5}\frac{x^2-8x+16}{x^2-8x+15}=\frac{5^2-8.5+16}{5^2-8.5+15}=\frac{1}{0}=\infty \quad \rightarrow \quad x=5 \text{ es a.v.}$$

Asíntotas horizontales,

$$\left.\begin{array}{l} \underset{x\to-\infty}{Lím}\, f(x) = \underset{x\to-\infty}{Lím}\, \dfrac{x^2-8x+16}{x^2-8x+15} = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right) = \underset{x\to-\infty}{Lím}\, \dfrac{x^2}{x^2} = \underset{x\to-\infty}{Lím}\, 1 = 1 \\ \underset{x\to+\infty}{Lím}\, f(x) = \underset{x\to+\infty}{Lím}\, \dfrac{x^2-8x+16}{x^2-8x+15} = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right) = \underset{x\to+\infty}{Lím}\, \dfrac{x^2}{x^2} = \underset{x\to+\infty}{Lím}\, 1 = 1 \end{array}\right\} \to \quad y = 1 \quad es\ a.h.$$

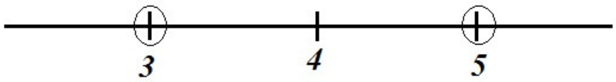
Por tanto, ***las asíntotas verticales de f(x) son x = 3 y x = 5, y su asíntota horizontal y = 1.***

Para resolver los apartados c) y d) calculamos f´(x) y estudiamos su signo,

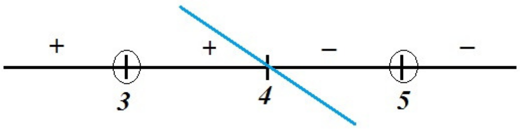
$$f´(x) = \frac{(2x-8)\,(x^2-8x+15) - (x^2-8x+16)\,(2x-8)}{(x^2-8x+15)^2} = \frac{(2x-8)\,[(x^2-8x+15)-(x^2-8x+16)]}{(x^2-8x+15)^2} =$$

$$= \frac{(2x-8)\,[x^2-8x+15-x^2+8x-16]}{(x^2-8x+15)^2} = \frac{(2x-8)\,(-1)}{(x^2-8x+15)^2} = \frac{8-2x}{(x^2-8x+15)^2}$$

Para estudiar el signo de f´(x) obtengamos las raíces del numerador y del denominador.
8 – 2 x = 0; 8 = 2 x; x = 4
(x^2 – 8 x + 15 $)^2$ = 0; x^2 – 8 x + 15 = 0; x = 3 , 5 (hecho en a)).
En la recta real marcamos las raíces obtenidas y los valores de x que no son del dominio de la función,



Hay que estudiar el signo de f´(x) es estos cuatro intervalos. f´(x) es un cociente cuyo denominador está elevado al cuadrado, luego siempre es positivo; por tanto el signo de f´(x) solo depende del numerador que es un polinomio de primer grado con coeficiente de x negativo y raíz 4, luego:



Resolvamos los apartados c) y d)

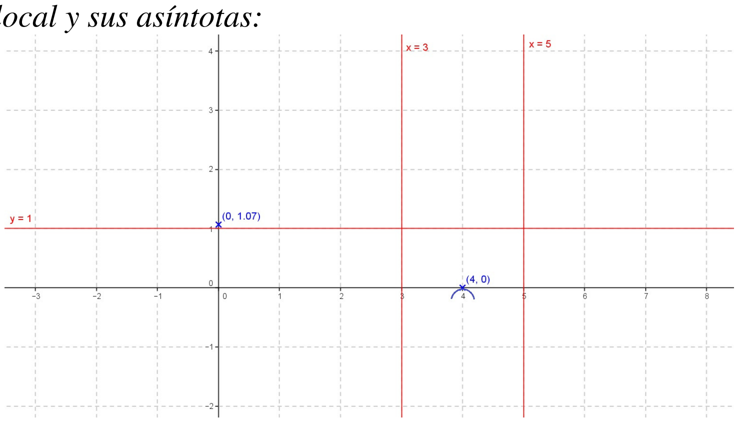
c) ***f(x) es creciente en (– ∞ , 3) ∪ (3 , 4) y f(x) es decreciente en (4 , 5) ∪ (5 , +∞)***

d) f(x) solo tiene un máximo local para x = 4,

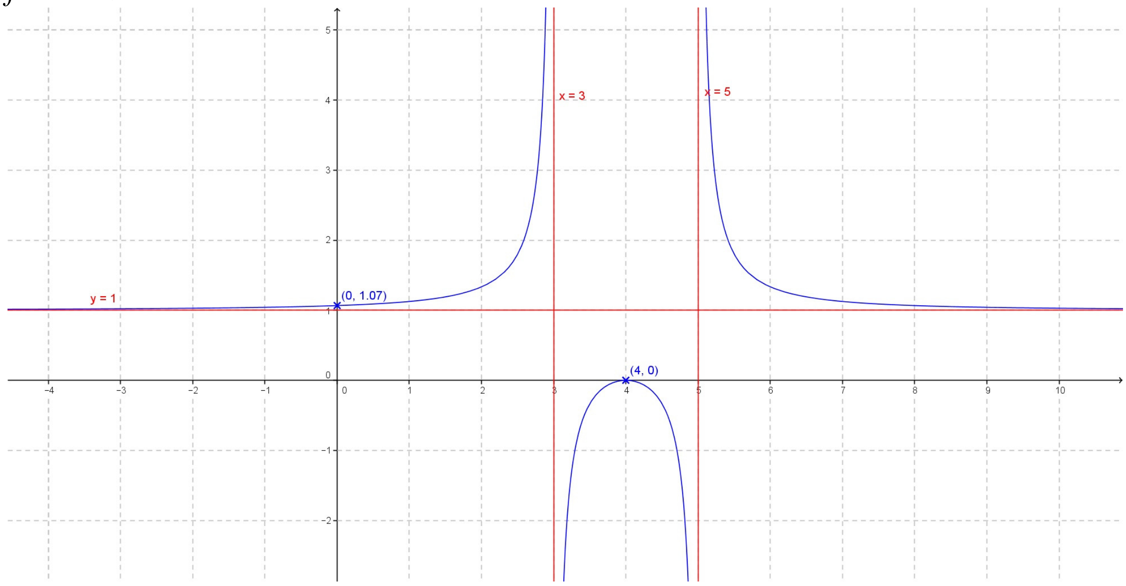
$$x = 4 \quad \to \quad f(4) = \frac{4^2-8.4+16}{4^2-8.4+15} = \frac{16-32+16}{16-32+15} = \frac{0}{-1} = 0$$

Por tanto, ***f(x) tiene un máximo local en (4 , 0) y no tiene mínimos locales.***

d) De lo estudiado en los apartados anteriores, conocemos los puntos de corte de f(x) con los ejes coordenados, su máximo local y sus asíntotas:



Considerando los intervalos de crecimiento y decrecimiento obtenidos, la representación gráfica de la función será:



Si con los datos obtenidos no se supiese dibujar la función, se puede completar calculando la posición de la curva respecto de las asíntotas.

x = 3

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} \frac{x^2-8x+16}{x^2-8x+15} \overset{x=2'9}{=} \frac{2'9^2-8.2'9+16}{2'9^2-8.2'9+15}\infty = \frac{+}{+}\infty = +\infty$$

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} \frac{x^2-8x+16}{x^2-8x+15} \overset{x=3'1}{=} \frac{3'1^2-8.3'1+16}{3'1^2-8.3'1+15}\infty = \frac{+}{-}\infty = -\infty$$

$\rightarrow$ 

x = 5

$$\lim_{x\to 5^-} f(x) = \lim_{x\to 5^-} \frac{x^2-8x+16}{x^2-8x+15} \overset{x=4'9}{=} \frac{4'9^2-8.4'9+16}{4'9^2-8.4'9+15}\infty = \frac{+}{-}\infty = -\infty$$

$$\lim_{x\to 5^+} f(x) = \lim_{x\to 5^+} \frac{x^2-8x+16}{x^2-8x+15} \overset{x=5'1}{=} \frac{5'1^2-8.5'1+16}{5'1^2-8.5'1+15}\infty = \frac{+}{+}\infty = +\infty$$

$\rightarrow$ 

y = 1

$$x=-1000 \quad \rightarrow f(-1000) = \frac{(-1000)^2-8.(-1000)+16}{(-1000)^2-8.(-1000)+15} = \frac{1008016}{1008015} \cong 1'000...$$

$$x=1000 \quad \rightarrow f(1000) = \frac{1000^2-8.1000+16}{1000^2-8.1000+15} = \frac{992016}{990215} \cong 1'000...$$

$\rightarrow$