OPCIÓN B

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 2. Sea la función $f(x)=\begin{cases} \dfrac{a}{x} & 2\le x<5 \\ x^2-3x-8 & 5\le x\le 7 \end{cases}$

a) Calcula el valor de a para el que $f(x)$ es continua en el intervalo $[\,2\,,\,7\,]$.

b) Para $a = 15$, estudia el crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ en el intervalo $[\,2\,,\,7\,]$.

c) Calcula $\int_5^6 f(x)\,dx$.

Solución:

a) ¿a? / f(x) sea continua en $[\,2\,,\,7\,]$

Para $2\le x<5$, $f(x)=\dfrac{a}{x}$, *como* $x\neq 0$, *f(x) es continua.*

Para $5<x\le 7$, $f(x)=x^2-3x-8$, *como f(x) es un polinomio, f(x) es continua.*

Veamos la continuidad en $x=5$,

1) $f(5)=5^2-3\cdot 5-8=25-15-8=2$, *luego* $\exists f(5)$

2) $\lim\limits_{x\to 5} f(x)=\begin{cases} \lim\limits_{x\to 5^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 5^-}\dfrac{a}{x}=\dfrac{a}{5} \\ \lim\limits_{x\to 5^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 5^-}\left(x^2-3x-8\right)=5^2-3\,.\,5-8=2 \end{cases}$, *para que exista el límite deben coincidir*

los dos límites laterales, es decir, $\dfrac{a}{5}=2 \;\rightarrow\; a=10$.

Por tanto, para $a=10$ *se cumple:* $\lim\limits_{x\to 5} f(x)=f(5)$, *luego f(x) es continua en* $x=5$.

Solución: ***f(x) es continua en [2 , 7] para a = 10.***

b) a = 15, ¿monotonía de f(x) en [2 , 7]?.

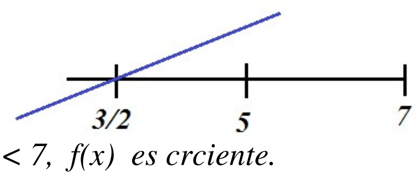
$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{15}{x} & 2\le x<5 \\ x^2-3x-8 & 5\le x\le 7 \end{cases} \quad\rightarrow\quad f'(x)=\begin{cases} \dfrac{-15}{x^2} & 2<x<5 \\ 2x-3 & 5<x<7 \end{cases}$$

Para $2<x<5$, $f'(x)=\dfrac{-15}{x^2}$, *por tanto,* $f'(x)<0 \;\rightarrow$ *f(x) es decreciente.*

Para $5<x<7$, $f'(x)=2x-3$,

$2x-3=0$, $2x=3$, $x=3/2$

Estudiemos el signo de $2x-3$ *en* $[\,5\,,\,7\,]$: $2x-3$ *es un polinomio de primer grado con coeficiente de x positivo y raíz 3/2, gráficamente:*



Por tanto, entre 5 y 7 $2x-3$ *es positivo; luego* $f'(x)$ *es positiva.*

Para $5<x<7$, *f(x) es crciente.*

Solución: ***f(x) es decreciente en (2 , 5) y creciente en (5 , 7).***

c) ¿ $\int_5^6 f(x)\,dx$?

Entre 5 y 6, $f(x) = x^2 - 3x - 8$, por tanto

$$\int_5^6 f(x)\ dx = \int_5^6 \left(x^2 - 3x - 8\right)\ dx = \left[\frac{x^3}{3} - 3\frac{x^2}{2} - 8x\right]_5^6 == \left(\frac{6^3}{3} - 3\frac{6^2}{2} - 8\,.\,6\right) - \left(\frac{5^3}{3} - 3\frac{5^2}{2} - 8\,.\,5\right) =$$

$$= (72 - 54 - 48) - \left(\frac{125}{3} - \frac{75}{2} - 40\right) = -30 - \left(\frac{250 - 225}{6} - 40\right) - 30 - \frac{25}{6} + 40 = 10 - \frac{25}{6} = \frac{60 - 25}{6} = \frac{35}{6} \approx 5'8333$$

Solución: $\int_5^6 f(x)\,dx = \dfrac{35}{6}$