Problema 1. Una empresa fabrica dos productos diferentes, P1 y P2, que vende a 300 y 350 € por tonelada (t), respectivamente. Para ello utiliza dos tipos de materias primas (A y B) y mano de obra. Las disponibilidades semanales de las materias primas son 30t de A y 36t de B, y las horas de mano de obra disponibles a la semana son 160. En la tabla siguiente se resumen los requerimientos (en t) de las materias primas y las horas de trabajo necesarias para la producción de una tonelada de cada producto:

	materia prima (t)		
Producto	A	B	Mano de obra (h)
P1	2	3	4
P2	3	1	20

Determina la producción semanal que maximiza los ingresos de la empresa sabiendo que un estudio de mercado indica que la demanda del producto P2 nunca supera a la del producto P1. ¿A cuánto ascienden los ingresos máximos?

Solución:

Llamando: x = *producción semanal, en t, del producto P1*

y = *producción semanal, en t, del producto P2*

Los datos del problema los podemos resumir en la tabla:

		materia prima (t)			
Producto	*toneladas*	*A*	*B*	*Mano de obra (h)*	*Ingresos (€)*
P1	x	$2x$	$3x$	$4x$	$300x$
P2	*Y*	$3y$	$1y$	$20y$	$350y$
Restricciones		30	36	160	

Como las variables x *e* y *representan toneladas de producto deben ser mayores o iguales a cero.*

La ingresos vienen dados por la función: $z = 300x + 350y$

Las restricciones las obtenemos del enunciado:

Semanalmente dispone de 30 t de A: $2x + 3y \le 30$

Semanalmente dispone de 36 t de B: $3x + y \le 36$

Semanalmente dispone de 160 h de mano de obra: $4x + 20y \le 160$; *simplificando* $x + 5y \le 40$

"un estudio de mercado indica que la demanda de P2 nunca supera a la de P1": $y \le x$

El problema a resolver es:

$$\text{maximizar} \quad z = 300x + 350y$$

$$\text{s.a.} \quad \begin{cases} 2x + 3y \le 30 \\ 3x + y \le 36 \\ x + 5y \le 40 \\ y \le x \\ x, y \ge 0 \end{cases}$$

Efectuamos los cálculos necesarios para la representación gráfica de las inecuaciones.

(a) $2x+3y\leq 30$

$2x+3y=30$

x	y
0	10
15	0

¿(0,0) cumple?

$2\,.\,0+3\,.\,0\leq 30$ Sí

(b) $3x+y\leq 36$

$3x+y=36$

x	y
0	36
12	0

¿(0,0) cumple?

$3\,.\,0+0\leq 36$ Sí

(c) $x+5y\leq 40$

$x+5y=40$

x	y
0	8
40	0

¿(0,0) cumple?

$0+5\,.\,0\leq 40$ Sí

(d) $y\leq x$

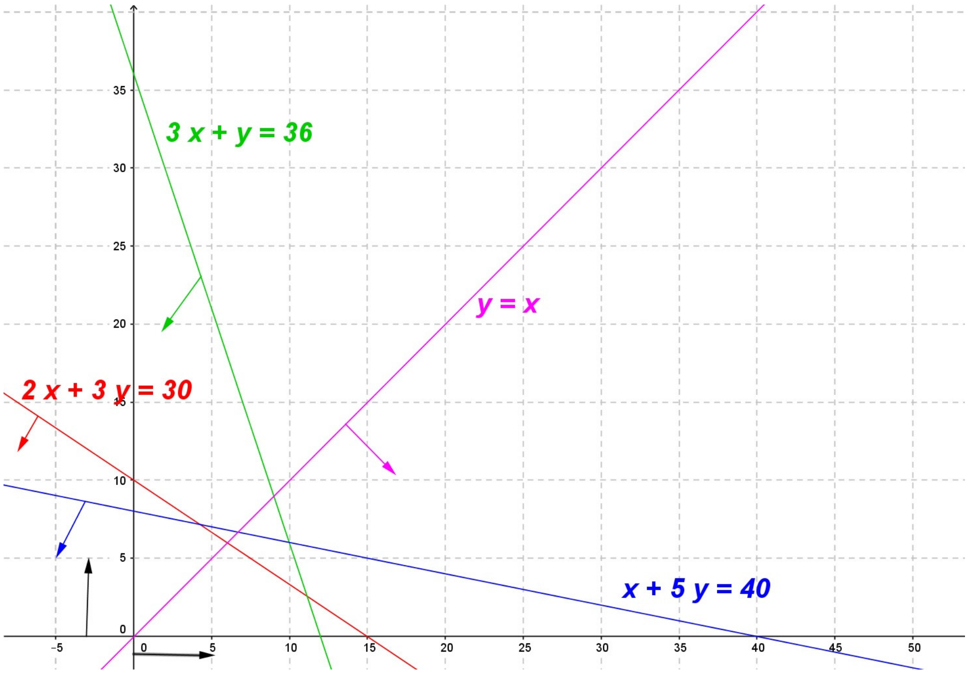
$y=x$

x	y
0	0
40	40

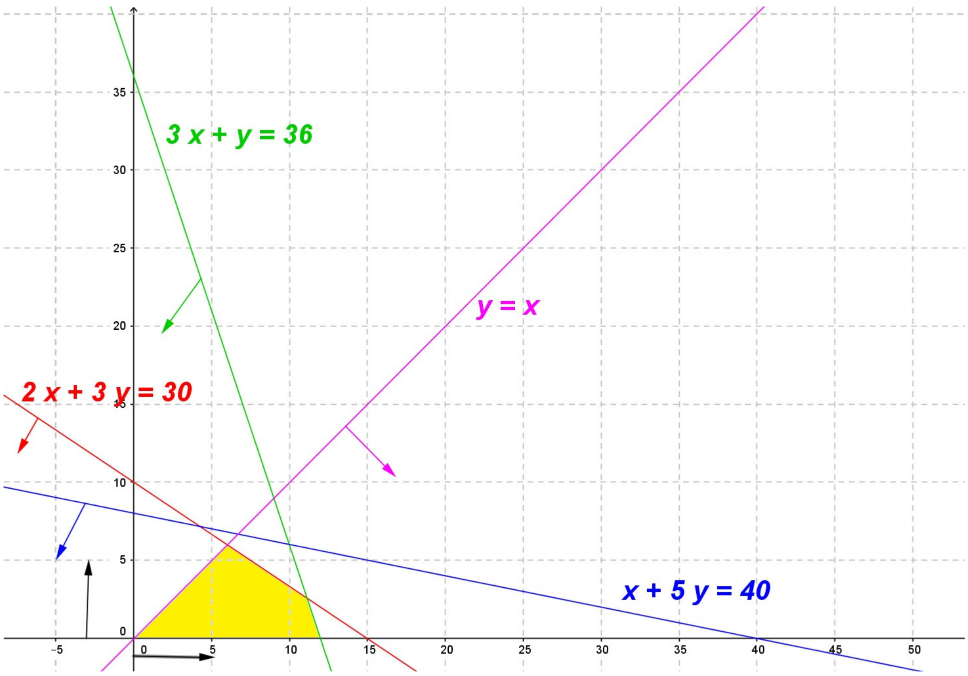
¿(5,0) cumple?

$0\leq 5$ Sí

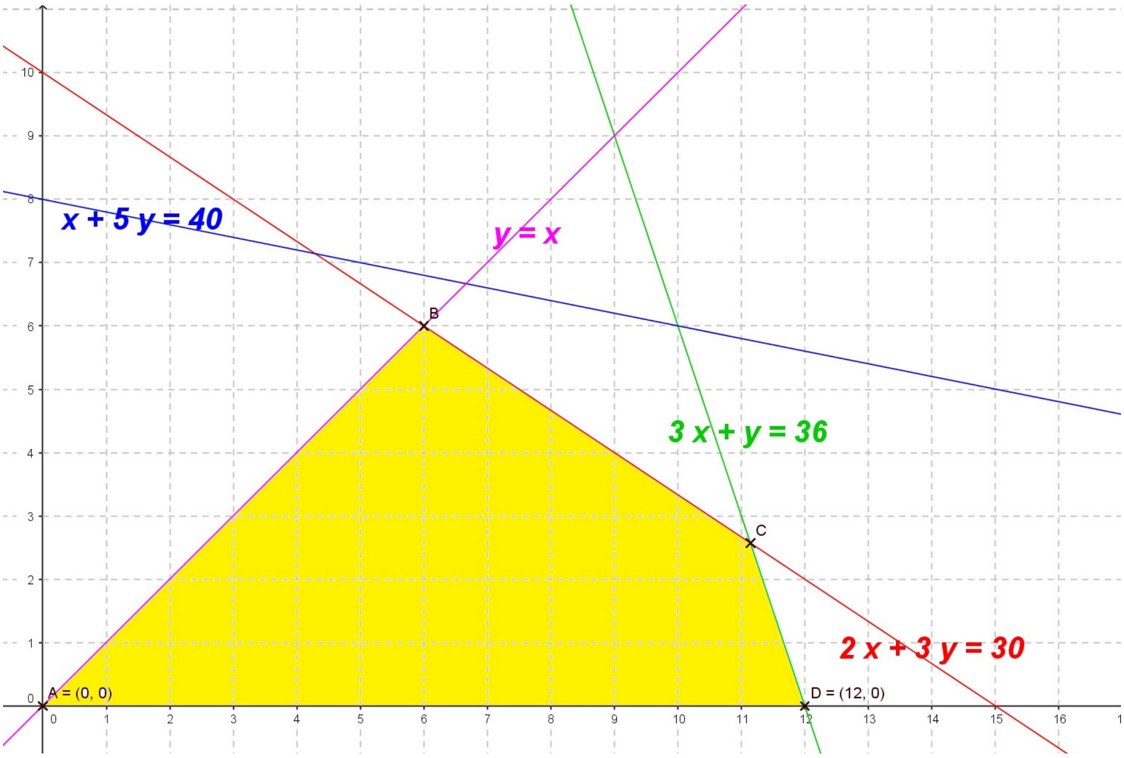
La representación gráfica será:



Y la región determinada por el sistema de inecuaciones (región factible) está formada por los puntos de la zona sombreada.



Ampliamos la región factible y veamos los vértices que debemos calcular.



Los vértices de la región factible son A (0, 0), B, C y D (12 , 0). Los vértices A, y D los conocemos directamente de la representación gráfica; los vértices B y C los obtendremos mediante los puntos de corte de las rectas correspondientes.

Punto B, corte entre (a) y (d):

$$\begin{cases} 2x+3y=30 \\ y=x \end{cases}$$

Sustituyendo el valor de y (de la 2ª) en la 1ª ecuación: 2 x + 3 x = 30; 5 x = 30; x = 6
Luego B (6 , 6)

Punto C, corte entre (a) y (b):

$$\begin{cases} 2x+3y=30 \\ 3x+y=36 \end{cases}$$

De la 2ª ecuación: y = 36 – 3 x , sustituyendo este valor de y en la 1ª ecuación:
2 x + 3 (36 – x) = 30; 2 x + 108 – 9 x = 30; – 7 x = 30 – 108; – 7 x = – 78

$$x=\frac{-78}{-7}=\frac{78}{7}\cong 11'1429. \qquad \text{Luego,} \quad y=36-3\,\frac{78}{7}=\frac{18}{7}\cong 2'5714$$

Por tanto, $C\left(\frac{78}{7},\frac{18}{7}\right)$

Los vértices de la región factible son A (0, 0), B (6 , 6), $C\left(\frac{78}{7},\frac{18}{7}\right)$ *y D (12 , 0)*

El máximo de la función z en la región se alcanzará en alguno de los extremos de la región. Calculemos los valores de la función en los vértices,

x , y	z = 300 x + 350 y	
0 , 0	300 . 0 + 350 . 0 = 0	
6 , 6	300 . 6 + 350 . 6 = 3900	
$\frac{78}{7},\frac{18}{7}$	$300\,.\,\frac{78}{7}+350\,.\,\frac{18}{7}=\frac{29700}{7}\cong 4242'86$	**Máximo**
12 , 0	300 . 12 + 350 . 0 = 3600	

El máximo se alcanza en el punto $\left(\frac{78}{7},\frac{18}{7}\right)\approx$ *(11´14 , 2´57)*

Por tanto, para maximizar los ingresos, semanalmente, debe producir 11´14 t del producto P1 y 2´57 t del P2. Con esta producción los ingresos máximos serán de 4242´86 €.