Problema 2. Sea la función $f(x)=\begin{cases} x^2+2 & x\le 1 \\ \dfrac{6}{x^2+1} & 1<x \end{cases}$.

a) Estudia la continuidad de f(x) en el intervalo $]-\infty,+\infty[$.
b) Calcula los máximos y mínimos locales de *f(x)*.
c) Calcula el área de la región limitada por *f(x)* y las rectas $x=-1$ y $x=1$.

Solución:

a) Continuidad de f(x) en $]-\infty,+\infty[$.

Para $x<1$, $f(x)=x^2+2$, polinomio luego continua.

Para $x>1$, $f(x)=\dfrac{6}{x^2+1}$, cociente de polinomios cuyo denominador, x^2+1, es siempre distinto de cero luego continua.

Veamos para $x=1$,

a) $f(1)=1^2+2=3$

$$b)\ \lim_{x\to 1} f(x)=\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(x^2+2\right)=3 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{6}{x^2+1}=\dfrac{6}{1+1}=3 \end{array}\right\}=3$$

c) $f(1)=\lim\limits_{x\to 1} f(x)=3$

Se cumplen las tres condiciones de continuidad, f(x) es continua en $x=1$.

Por tanto, ***f(x) es continua en $]-\infty,+\infty[$.***

b) Máximos y mínimos locales de f(x).

Tenemos en cuenta que f(x), por el apartado a), es continua en $\Re$.

Calculamos f´(x).

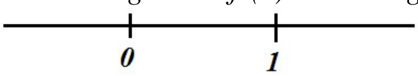
$$f'(x)=\begin{cases} 2x & x<1 \\ \dfrac{-6.2x}{\left(x^2+1\right)^2} & 1<x \end{cases}=\begin{cases} 2x & x<1 \\ \dfrac{-12x}{\left(x^2+1\right)^2} & 1<x \end{cases}$$

Resolvamos f´(x) = 0

$2x=0 \;\rightarrow\; x=0$ *(válido porque $0<1$)*

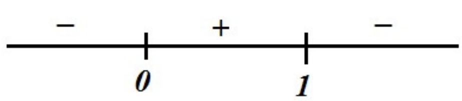
$\dfrac{-12x}{\left(x^2+1\right)^2}=0 \;\rightarrow\; -12x=0 \;\rightarrow\; x=0$ *(no válido $1<0$ es falso)*

Hay que estudiar el signo de f´(x) en los siguientes intervalos



x	f´
-1	$2.(-1)=-2<0$
$0´5$	$2.0´5=1>0$
2	$\dfrac{-12.2}{\left(2^2+1\right)^2}=\dfrac{-24}{25}<0$

Por tanto, el signo de f´ será:



El estudio anterior nos asegura que para $x=0$ hay un mínimo local.

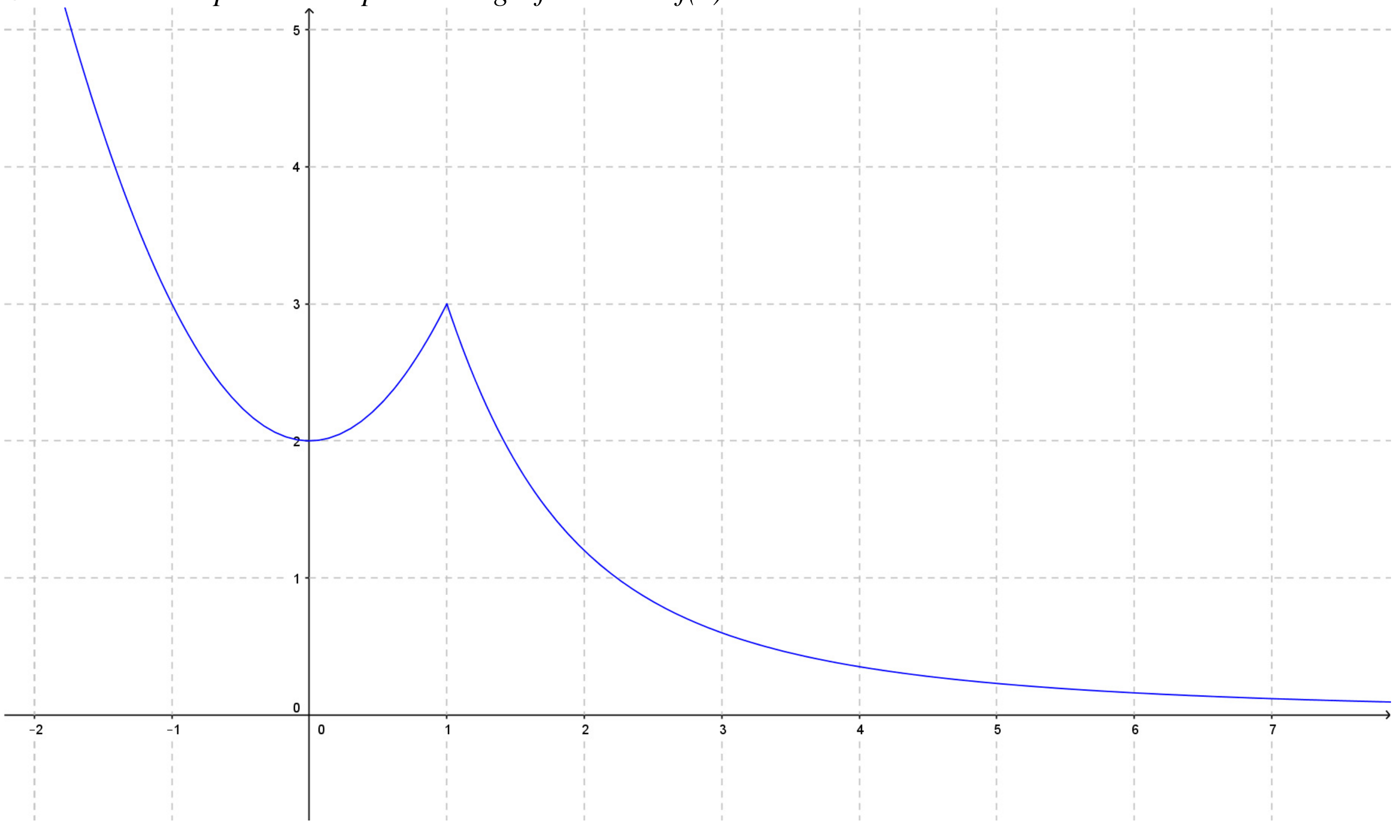
Considerando que no hemos calculado f´(1), para determinar que ocurre en $x=1$ vamos a representar f(x).

Para $x \leq 1$, $f(x)$ es un polinomio de 2º grado, una parábola, cuyo vértice es el mínimo local obtenido antes, $x = 0$ e $y = 0^2 + 2 = 2$, mínimo local (0 , 2). Del estudio de continuidad sabemos que la función pasa por (1 , 3).

Para $x > 1$, $f(x)$ es un cociente de polinomios del que sabemos:

- *parte del punto (1 , 3) {obtenido al estudiar la continuidad}*
- *es decreciente {obtenido al estudiar signo de $f'(x)$}*
- *puntos de corte con ejes coordenados,*
  - *$x = 0$, no es de este trozo ($x > 1$)*
  - *$f(x) = 0$, $\dfrac{6}{x^2+1} = 0 \quad \to \quad 6 = 0$, falso, no hay corte con eje X.*
- *asíntota horizontal,*
  - $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{6}{x^2+1} = \dfrac{6}{+\infty} = 0 \quad \to \quad$ *$y = 0$ es asíntota horizontal en $+\infty$*

Con estos datos podemos representar gráficamente $f(x)$:



A partir de la gráfica comprobamos que para $x = 1$ hay un máximo local.

Por tanto, ***la función $f(x)$ tiene un mínimo local en (0 , 2) y un máximo local en (1 , 3).***

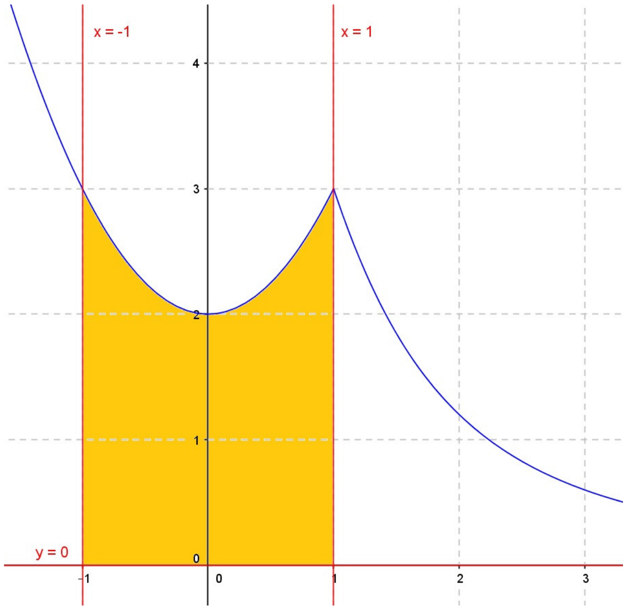
c) Área de la región limitada por f(x) y las rectas $x = -1$ y $x = 1$.

Si representamos este área no estaría limitada por la parte inferior o superior, por lo que sería infinita.

Para calcular un área en el enunciado falta poner otra recta que la delimite, normalmente, $y = 0$.

Por tanto, vamos a calcular el "área de la región limitada por f(x) y las rectas $x = -1$, $x = 1$ e $y = 0$"

Representamos el área a calcular:



Esta área la obtenemos mediante la siguiente integral:

$$A = \int_{-1}^{1} \left(x^2 + 2\right) dx = \left[\frac{x^3}{3} + 2x\right]_{-1}^{1} = \left(\frac{1}{3} + 2\right) - \left(\frac{-1}{3} - 2\right) = \frac{1}{3} + 2 + \frac{1}{3} + 2 = \frac{14}{3} \cong 4'6667 \ u.a.$$

Es decir, ***el área pedida mide 4´6667 u.a.***