Problema 1. Se dan las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$.

a) Halla la matriz X que satisface la ecuación $A\,X - B\,C\,X = 3\,C$.

b) Calcula la matriz inversa de $A^t + B$, donde A^t representa la matriz traspuesta de A.

Solución:

a) ¿Matriz X / A X – B C X = 3 C?

A X – B C X = 3 C, sacando factor X por la derecha,

(A – B C) X = 3 C, si existe (A – B C)$^{-1}$ *entonces* $X = (A - B\,C)^{-1}\,3\,C$

Calculemos A – B C,

$$A-B\,C=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2\,.\,1+2\,.\,1 & 2\,.\,(-1)+2\,.\,(-3) \\ 1\,.\,1-1\,.\,1 & 1\,.\,(-1)-1\,.\,(-3) \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 4 & -8 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 & 10 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Como $\begin{vmatrix} -3 & 10 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=-6+10=4\neq 0 \;\rightarrow\; \exists\;(A-B\,C)^{-1}$

Cálculo de $(A - B\,C)^{-1}$,

$$A-B\,C=\begin{pmatrix} -3 & 10 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \{menores\} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 10 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \{adjuntos\} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -10 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\{traspuesta\} \begin{pmatrix} 2 & -10 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Luego, $(A-B\,C)^{-1}=\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -10 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$

Cálculo de la matriz X,

$$X = (A - B\,C)^{-1}\,3\,C = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -10 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}3\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}=\frac{3}{4}\begin{pmatrix} 2 & -10 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}=\frac{3}{4}\begin{pmatrix} -8 & 28 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -6 & 21 \\ -3/2 & 6 \end{pmatrix}$$

Solución: $X=\begin{pmatrix} -6 & 21 \\ -3/2 & 6 \end{pmatrix}$

b) $(A^t + B)^{-1}$.

$$A^t+B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Como $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}=9-3=6\neq 0 \;\rightarrow\; \exists\;(A^t+B)^{-1}$

Cálculo de $(A^t + B)^{-1}$,

$$A^t + B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \;\rightarrow\; \{menores\} \; \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \;\rightarrow\; \{adjuntos\} \; \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \;\rightarrow$$

$$\{traspuesta\} \; \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$Luego,\; (A^t + B)^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/6 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Solución: $(A^t + B)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/6 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$