Problema 1. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, calcula:

a) $(A-I)^2$.
b) $A \cdot B^t$
c) $A-B^{-1}$

siendo I la matriz identidad y B^t y B^{-1} las matrices traspuesta e inversa de B, respectivamente.

Solución:
a) $(A-I)^2$.

$$A-I=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$$

$$(A-I)^2=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & -8 \\ 4 & 14 \end{pmatrix}$$

Solución: $(A-I)^2=\begin{pmatrix} -2 & -8 \\ 4 & 14 \end{pmatrix}$

b) $A \,.\, B^t$.

$$A\cdot B^t=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -10 & -6 \end{pmatrix}$$

Solución: $A\cdot B^t=\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -10 & -6 \end{pmatrix}$

c) $A-B^{-1}$.
Cálculo de B^{-1},

$$\text{Como}\quad |B|=\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}=2\neq 0 \;\rightarrow\; \exists\, B^{-1}$$

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \{menores\} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \{adjuntos\} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \{traspuesta\} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Luego, } B^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -3/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Finalmente, } A-B^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & -3/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 7/2 \\ -1 & -7/2 \end{pmatrix}$$

Solución: $A-B^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 7/2 \\ -1 & -7/2 \end{pmatrix}$