Problema 2. Dada la función $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2-1}$, calcula:

a) Su dominio y puntos de corte con los ejes coordenados.
b) Las ecuaciones de las asíntotas horizontales y verticales.
c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
d) Los máximos y mínimos locales.
e) Representa gráficamente la función a partir de la información de los apartados anteriores.

Solución:
a) Dominio,

$$x^2-1=0 \;\rightarrow\; x^2=1 \;\rightarrow\; x=\pm\sqrt{1} \;\rightarrow\; x=\pm 1 \;\rightarrow\; Dom\; f(x)=\Re-\{-1\,,1\}$$

Puntos de corte con los ejes coordenados,

$$x=0 \;\rightarrow\; f(0)=\frac{0^2}{0^2-1}=\frac{0}{-1}=0 \;\rightarrow\; (0\,,0)$$

$$f(x)=0 \;\rightarrow\; \frac{x^2}{x^2-1}=0 \;\rightarrow\; x^2=0 \;\rightarrow\; x=0 \;\rightarrow\; (0\,,0)$$

Sólo hay un punto de corte con los ejes coordenados, el (0 , 0).

b) Asíntota horizontal y asíntota vertical.
Asíntota horizontal,

$$\underset{x\to-\infty}{Lím}\, f(x)=\underset{x\to-\infty}{Lím}\frac{x^2}{x^2-1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\underset{x\to-\infty}{Lím}\frac{x^2}{x^2}=\underset{x\to-\infty}{Lím}\,1=1$$

$$\underset{x\to+\infty}{Lím}\, f(x)=\underset{x\to+\infty}{Lím}\frac{x^2}{x^2-1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\underset{x\to+\infty}{Lím}\frac{x^2}{x^2}=\underset{x\to+\infty}{Lím}\,1=1$$

Luego, y = 1 es la asíntota horizontal

Asíntotas verticales.
Del dominio de la función deducimos que hay dos posibles A.V. x = – 1 y x = 1

$x=-1$

$$\underset{x\to-1}{Lím}\frac{x^2}{x^2-1}=\frac{(-1)^2}{(-1)^2-1}=\frac{1}{1-1}=\frac{1}{0}=\infty \;\rightarrow\; x=-1 \quad es\ A.V.$$

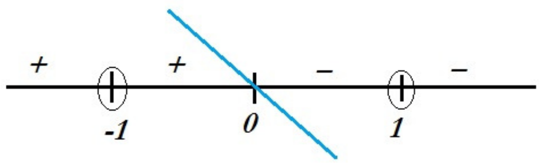
$x=1$

$$\underset{x\to1}{Lím}\frac{x^2}{x^2-1}=\frac{1^2}{1^2-1}=\frac{1}{1-1}=\frac{1}{0}=\infty \;\rightarrow\; x=1 \quad es\ A.V.$$

c) Monotonía.
Estudiemos el signo de $f'(x)$

$$f'(x)=\frac{2x\cdot\left(x^2-1\right)-x^2\cdot 2x}{\left(x^2-1\right)^2}=\frac{2x^3-2x-2x^3}{\left(x^2-1\right)^2}=\frac{-2x}{\left(x^2-1\right)^2}$$

El denominador de $f'(x)$ está elevado al cuadrado, siempre será positivo. El signo de $f'(x)$ sólo depende del numerador que, gráficamente, es una línea recta de pendiente negativa (como – 2 x = 0 → x = 0) que pasa por (0 , 0). Es decir,



Por tanto,
f(x) es creciente en $(-\infty,-1)\cup(-1\,,0)$ y
f(x) es decreciente en $(0\,,1)\cup(1\,,+\infty)$

d) Máximos y mínimos locales.

Del estudio anterior deducimos que para $x = 0$ hay un máximo local. Y la función no tiene mínimos locales.

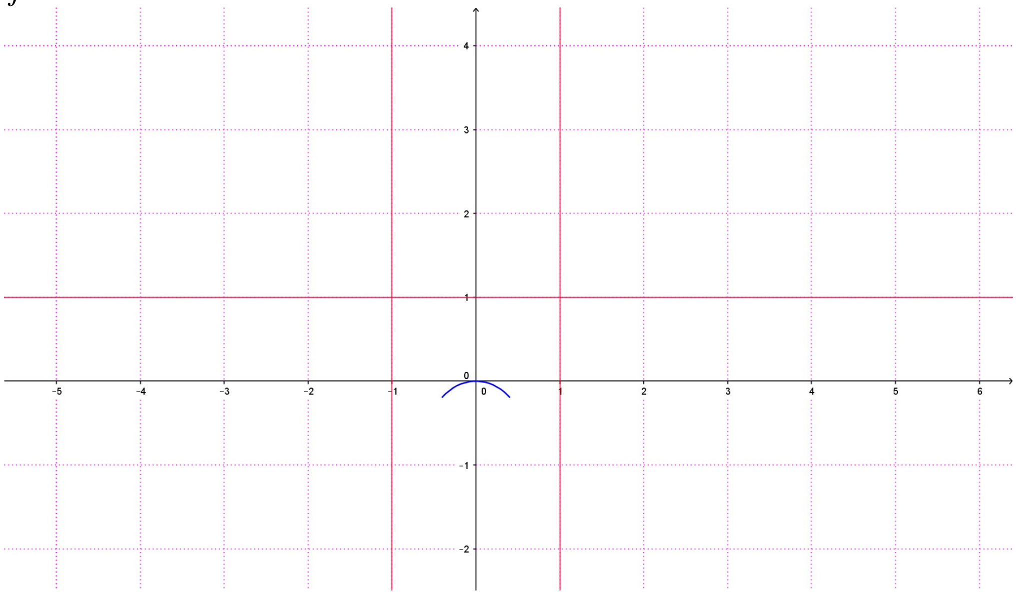
Máximo local en el punto (0 , 0)

e) Representación gráfica.

De lo estudiado en los apartados anteriores sabemos:

Corte con ejes coordenados (0 , 0) que, además, es máximo local; a.h. $y = 1$ y a.v. $x = -1$ y $x = 1$.

Dibujando estos elementos:



Considerando los intervalos de crecimiento y decrecimiento obtenidos, la representación gráfica de f(x) es: