Problema 2. Sea la función:

$$f(x)=\begin{cases} x^3-3\,x-20 & x\le 3 \\ \dfrac{2}{a-x} & x>3 \end{cases}$$

a) Calcula el valor de a para el que $f(x)$ es continua en $x = 3$.
b) Para $a = 0$, estudia el crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.
c) Para $a = 0$, calcula los máximos y mínimos locales de $f(x)$.

Solución:

a) ¿a? / f(x) sea continua en x = 3.

Condiciones de continuidad

1) $f(3) = 3^3 - 3\,.\,3 - 20 = 27 - 9 - 20 = -2$, *existe f(3)*

2) $$\lim_{x\to 3} f(x)=\begin{cases} \lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-}\left(x^3-3\,x-20\right)=3^3-3\,.\,3-20=-2 \\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+}\left(\dfrac{2}{a-x}\right)=\dfrac{2}{a-3} \end{cases}$$

Para que exista el límite, los límites laterales deben coincidir, $-2=\dfrac{2}{a-3}$,

$$-2(a-3)=2 \;\rightarrow\; a-3=\frac{2}{-2} \;\rightarrow\; a-3=-1 \;\rightarrow\; a=-1+3 \;\rightarrow\; a=2$$

Luego, ***para que f(x) sea continua en x = 3 debe ser a = 2.***

b) Para a = 0, ¿monotonía?.

Para $a=0$, $\quad f(x)=\begin{cases} x^3-3x-20, & x\le 3 \\ \dfrac{2}{-x}=\dfrac{-2}{x}, & x>3 \end{cases}$

Por ser función definida a trozos estudiemos la monotonía en cada trozo.

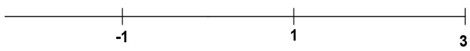
Para $x < 3$

$f(x) = x^3 - 3\,x - 20$, *estudiemos el signo de* $f'(x)$

$f'(x) = 3\,x^2 - 3$

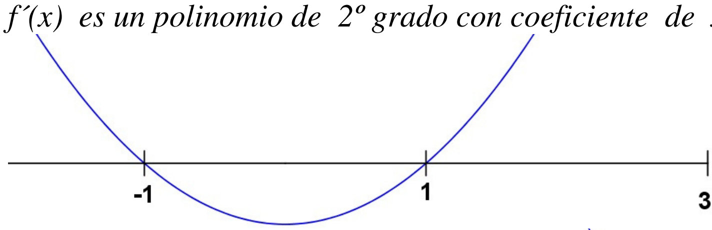
$$3\,x^2-3=0 \;\rightarrow\; 3\,x^2=3 \;\rightarrow\; x^2=\frac{3}{3} \;\rightarrow\; x^2=1 \;\rightarrow\; x=\pm\sqrt{1}=\pm 1$$

Hay que estudiar el signo de $f'(x)$ *en los siguientes intervalos:*

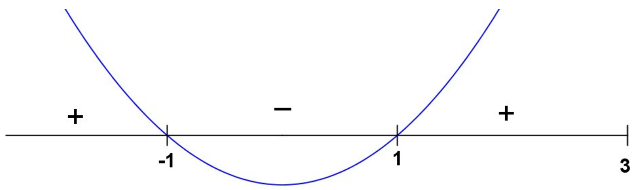


y´ es una línea recta de pendiente negativa y que pasa por x = 4´5:

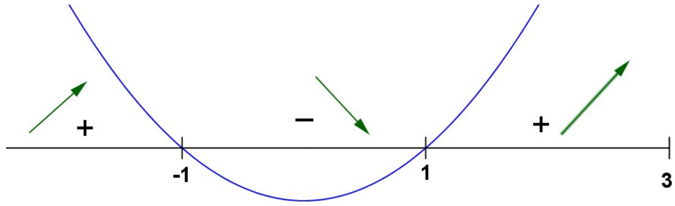
$f'(x)$ *es un polinomio de 2º grado con coeficiente de* x^2 *positivo y raíces* -1 *y* 1, *por tanto:*



En cada intervalo el signo de $f'(x)$ *es:*



Y el crecimiento y decrecimiento será



Para $x > 3$

$$f(x) = \frac{-2}{x}$$

$$f'(x) = \frac{0 \cdot x - (-2) \cdot 1}{x^2} = \frac{2}{x^2}$$

Estudiemos el signo de $f'(x)$*, es una fracción, numerador positivo y como el denominador está elevado al cuadrado (es positivo). Por tanto el signo de* $f'(x)$ *es positivo.*

Para $x > 3$*, la función es creciente.*

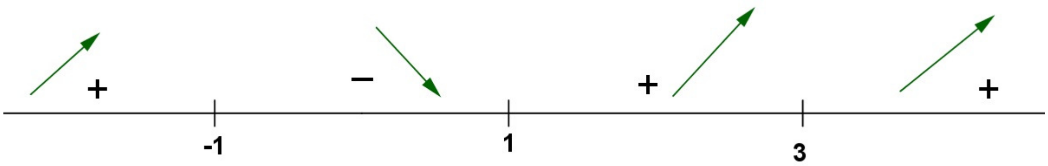
Veamos si existe $f'(3)$

$$f'(3) = \begin{cases} f'(3^-) = 3 \cdot 3^2 - 3 = 24 \\ f'(3^+) = \frac{2}{3^2} = \frac{2}{9} \end{cases} \qquad 24 \neq \frac{2}{9} \quad \rightarrow \quad No\ existe \quad f'(3)$$

Por tanto, ***f(x) es creciente en*** $(-\infty, -1) \cup (1, 3) \cup (3, +\infty)$ ***y decreciente en*** $(-1, 1)$**.**

c) Para $a = 0$*, ¿extremos?*

De lo estudiado en el apartado anterior:



Por tanto $f(x)$ *tiene un máximo local en* $x = -1$ *y un mínimo local en* $x = 1$*.*

$x = -1 \quad \rightarrow \quad f(-1) = (-1)^3 - 3 \cdot (-1) - 20 = -1 + 3 - 20 = -18$

$x = 1 \quad \rightarrow \quad f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1 - 20 = 1 - 3 - 20 = -22$

Finalmente, f(x) tiene un máximo local en $(-1, -18)$ ***y un mínimo local en*** $(1, -22)$**.**