OPCIÓN A

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 1. Dadas las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 2 & 0 & -3\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ -1 & 2 & 2\\ 2 & -1 & 3\end{pmatrix}\ y\ el\ vector\ c=\begin{pmatrix}-2\\ -1\\ 3\end{pmatrix},\ se\ pide:$$

a) Calcula el determinante de la matriz A y calcula A^{-1}. *(2 + 4 puntos)*
b) Determina el vector x que verifica $A\,x = B^t\,c$, donde B^t representa la matriz traspuesta de B. *(4 puntos)*

Solución:
a)

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & -2 & 1\\ 2 & 0 & -3\\ 0 & 1 & -1\end{vmatrix}=2+3-4=1.$$ ***Por tanto,*** $|A| = 1$

Como $|A| = 1 \neq 0 \ \rightarrow\ \exists\, A^{-1}$

Cálculo de A^{-1},

$$A \xrightarrow{menores} \begin{pmatrix}\begin{vmatrix}0 & -3\\ 1 & -1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}2 & -3\\ 0 & -1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}-2 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}-2 & 1\\ 0 & -3\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & -3\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & -2\\ 2 & 0\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -2 & 2\\ 1 & -1 & 1\\ 6 & -5 & 4\end{pmatrix}\xrightarrow{adjuntos}\begin{pmatrix}3 & 2 & 2\\ -1 & -1 & -1\\ 6 & 5 & 4\end{pmatrix}\xrightarrow{traspuesta}\begin{pmatrix}3 & -1 & 6\\ 2 & -1 & 5\\ 2 & -1 & 4\end{pmatrix}$$

Finalmente, $A^{-1}=\dfrac{1}{1}\begin{pmatrix}3 & -1 & 6\\ 2 & -1 & 5\\ 2 & -1 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -1 & 6\\ 2 & -1 & 5\\ 2 & -1 & 4\end{pmatrix}$

b) ¿Vector x*?* / $A\,x = B^t\,c$

Calculemos $B^t\,c$

$$B=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ -1 & 2 & 2\\ 2 & -1 & 3\end{pmatrix},\quad luego\quad B^t=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ -2 & 2 & -1\\ 0 & 2 & 3\end{pmatrix}$$

$$B^t\cdot c=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ -2 & 2 & -1\\ 0 & 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\ -1\\ 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1(-2)-1(-1)+2\cdot 3\\ -2(-2)+2(-1)-1\cdot 3\\ 0(-2)+2(-1)+3\cdot 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2+1+6\\ 4-2-3\\ 0-2+9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\ -1\\ 7\end{pmatrix}$$

Luego, $A\,x=\begin{pmatrix}5\\ -1\\ 7\end{pmatrix}$, *multiplicando por la izquierda por* A^{-1},

$$A^{-1}\,A\,x = A^{-1}\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad I\,x = A^{-1}\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad x = A^{-1}\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 6 \\ 2 & -1 & 5 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot 5 - 1(-1) + 6\cdot 7 \\ 2\cdot 5 - 1(-1) + 5\cdot 7 \\ 2\cdot 5 - 1(-1) + 4\cdot 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15+1+42 \\ 10+1+35 \\ 10+1+28 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 58 \\ 46 \\ 39 \end{pmatrix}$$

Solución: $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 58 \\ 36 \\ 49 \end{pmatrix}$