OPCIÓN A

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 2. Los ingresos y costes anuales, en miles de euros, de una fábrica de mochilas vienen dados, respectivamente, por las funciones

$$I(x) = 4\,x - 9\,, \quad C(x) = 0{,}01\,x^2 + 3\,x$$

donde la variable x expresa en euros el precio de venta de una mochila. Se pide:

a) Calcula la función de beneficios. *(1 punto)*

b) ¿Cuál ha de ser el precio de venta x para que el beneficio sea máximo? *(1 punto)* ¿Cuál es dicho beneficio máximo? *(1 punto)*

c) Para la función de beneficios, determina los puntos de corte con los ejes y las zonas de crecimiento y decrecimiento. Representa gráficamente dicha función. *(5 puntos)*

d) Razona para qué precios de venta (valores de x) la empresa tendría pérdidas. *(2 puntos)*

Solución:

Tenemos las funciones: $I(x) = 4\,x - 9$, $C(x) = 0{,}01\,x^2 + 3\,x$, *en las que* x *es el precio de venta de la mochila (en euros), por lo que,* $x \geq 0$. $I(x)$ *y* $C(x)$ *representan miles de euros.*

a) Función de beneficios, B(x), en miles de euros.

$$B(x) = I(x) - C(x) = 4\,x - 9 - (\,0{,}01\,x^2 + 3\,x\,) = 4\,x - 9 - 0{,}01\,x^2 - 3\,x = -\,0{,}01\,x^2 + x - 9,\ x \geq 0.$$

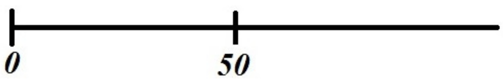
Solución: la función de beneficios es $\boldsymbol{B(x) = -\,0{,}01\,x^2 + x - 9,\ x \geq 0.}$

b) Máximo de B(x)

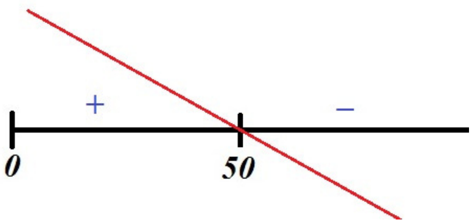
$$B'(x) = -\,0'02\,x + 1$$

$$B'(x) = 0 \;\rightarrow\; -\,0'02\,x + 1 = 0 \;\rightarrow\; -\,0'02\,x = -\,1 \;\rightarrow\; x = \frac{-1}{-0'02} = 50$$

Hay que estudiar el signo de $B'(x)$ *en los intervalos:*



$B'(x)$ *es una línea recta de pendiente negativa que pasa por (50,0), por lo que:*



Por tanto, en $x = 50$ *hay un máximo relativo de B(x) que, además es el absoluto ya que a su izquierda la función es creciente y a su derecha decreciente.*

Para $x = 50$, $B(50) = -\,0{,}01\,.\,50^2 + 50 - 9 = 16.$

Solución: para que el beneficio sea máximo el precio de venta de las mochilas ha de ser de 50 euros y el beneficio máximo será de 16 miles de euros, es decir, 16000 euros.

c) $B(x) = -0{,}01\,x^2 + x - 9,\ \ x \geq 0.$ ¿Puntos de corte con ejes, monotonía y representación?

Puntos de corte con los ejes coordenados:

$x = 0 \;\rightarrow\; B(0) = -9 \;\rightarrow\; (0, -9)$

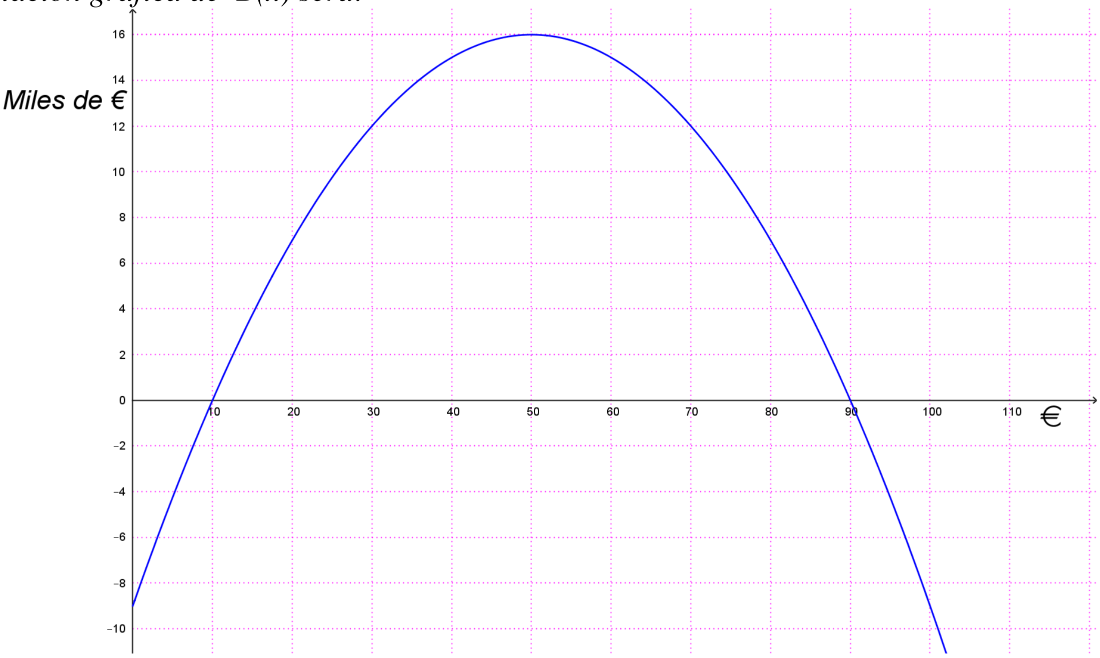
$$B(x) = 0 \;\rightarrow\; -0'01x^2 + x - 9 = 0 \;\rightarrow\; x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(-0'01)(-9)}}{2(-0'01)} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 0'36}}{-0'02} =$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{0'64}}{-0'02} = \frac{-1 \pm 0'8}{-0'02} = \left\langle \begin{array}{l} x_1 = \dfrac{-1+0'8}{-0'02} = 10 \;\rightarrow\; (10{,}0) \\ x_2 = \dfrac{-1-0'8}{-0'02} = 90 \;\rightarrow\; (90{,}0) \end{array} \right.$$

Los puntos de corte con los ejes coordenados son: (0 , – 9), (10 , 0) y (90 , 0).

Según vimos en el apartado (b) ***B(x) es creciente en el intervalo (0 , 50) y decreciente en (50 , +∞)*** *y su máximo es (50 , 16).*

La representación gráfica de B(x) será:



d) La empresa tiene pérdidas cuando los valores de la función de beneficios son negativos.

Según lo visto en el apartado anterior, la empresa tendría pérdidas en los intervalos [0 , 10) y (90 , +∞).

Es decir, para precios de venta de las mochilas entre 0 € y 10€ y a partir de 90€ la empresa tendría pérdidas (10€ y 90€ excluidos, *para ellos el beneficio es nulo****).***