OPCIÓN A

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 1. Un taller fabrica dos productos A y B. La producción de una unidad del producto A requiere 30 minutos para montar las piezas que lo forman y 40 minutos para pintarlo y la producción de una unidad del producto B exige 40 minutos para montar las piezas y 30 minutos para pintarlo.
Cada día se puede destinar como máximo 10 horas para montar piezas y 11 horas, también como máximo, para pintar los productos producidos.
Cada unidad del producto A se vende a 40 euros y cada unidad del producto B se vende a 35 euros.
¿Cuántas unidades se han de producir cada día de cada producto para obtener el máximo ingreso?
¿Cuál es dicho ingreso máximo?

Solución:
Llamando: x = *unidades fabricadas del producto A*
y = *unidades fabricadas del producto B*

Pasemos los minutos a horas, $30 \text{ min.} = \frac{1}{2} h$, $40 \text{ min.} = \frac{40}{60} = \frac{2}{3} h$.

Los datos del problema podemos resumirlo en la tabla siguiente:

	Nº unidades	*Montar*	*Pintar*	*Coste*
A	x	$30 \text{ min.} = \frac{1}{2} h$	$40 \text{ min.} = \frac{2}{3} h$	*40€*
B	y	$40 \text{ min.} = \frac{2}{3} h$	$30 \text{ min.} = \frac{1}{2} h$	*35€*

El problema proporcionan las siguientes restricciones:

"Cada día 10h para montar piezas" $\rightarrow \frac{1}{2}x + \frac{2}{3}y \le 10 \rightarrow 3x + 4y \le 60$.

"Cada día 11h para pintar piezas" $\rightarrow \frac{2}{3}x + \frac{1}{2}y \le 11 \rightarrow 4x + 3y \le 66$.

Como las variables x e y representan número de unidades deben ser números naturales.
El beneficio viene dada por la función: $z = 40x + 35y$

El problema a resolver es:

$$\text{maximizar} \quad z = 40x + 35y$$

$$s.a. \begin{cases} 3x + 4y \le 60 \\ 4x + 3y \le 66 \\ x, y \in N \end{cases}$$

Efectuamos los cálculos necesarios para la representación gráfica de las inecuaciones.

$(a)\quad 3x+4y\le 60$

$3x+4y=60$

x	y
0	15
20	0

¿(0,0) cumple?

$3\cdot 0+4\cdot 0\le 60\quad$ *Sí*

$(b)\quad 4x+3y\le 66$

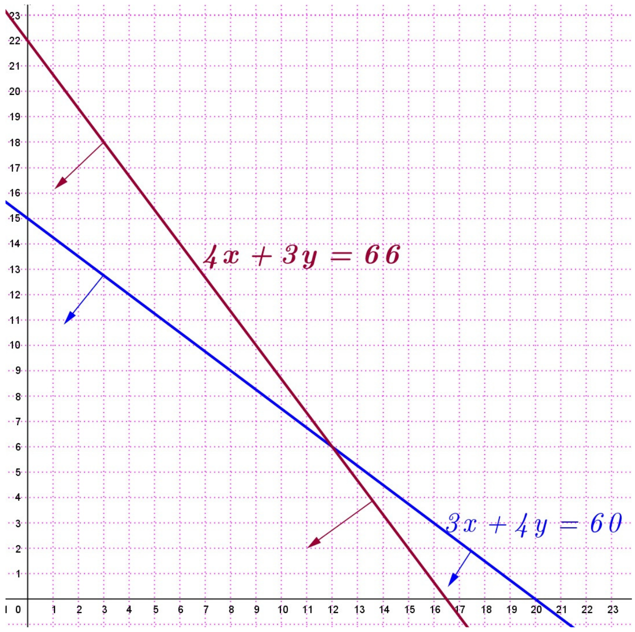
$4x+3y=66$

x	y
0	22
16´5	0

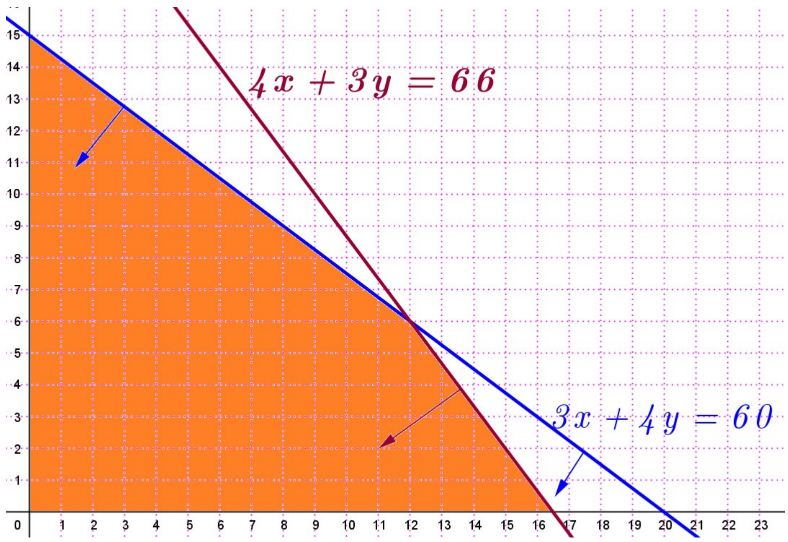
¿(0,0) cumple?

$4\cdot 0+3\cdot 0\le 66\quad$ *Sí*

La representación gráfica será:



La región determinada por el sistema de inecuaciones (región factible) está formada por los puntos de coordenada natural de la zona sombreada.



Vértices de la región factible:

los que obtuvimos en los cálculos para la representación son A (0 , 0), B (0 , 15) y D (16´5 , 0). Pero este último no es de la región factible (16´5 ∉ N), tendremos que tomar el (16 , 0) y esperar que el máximo se alcance en el punto de corte de las dos rectas.

Punto C, corte entre (a) y (b):

$$\begin{cases}3x+4y=60\\4x+3y=66\end{cases}\qquad \begin{matrix}4x1^{a}\\-3x2^{a}\end{matrix}\begin{cases}12x+16y=240\\-12x-9y=-198\end{cases}$$

Sumando: $7y=42\quad y=\dfrac{42}{7}=6$

Sustituyendo el valor de y en la 1ª ecuación: $3x+4\cdot 6=60;\quad 3x+24=60;\quad 3x=60-24$

$3x=36;\quad x=\dfrac{36}{3}=12.\qquad$ *Luego* $C(12,6)$

El máximo de la función z en la región se alcanzará en alguno de los extremos de la región. Calculemos los valores de la función en los vértices,

x , y	$z = 40\,x + 35\,y$	
$0 , 0$	$40 . 0 + 35 . 0 = 0$	
$0 , 15$	$40 . 0 + 35 . 15 = 525$	
$12 , 6$	$40 . 12 + 35 . 6 = 690$	*máximo*
$16 , 0$	$40 . 16 + 35 . 0 = 640$	

El máximo se alcanza en el punto (12 , 6)

Por tanto,

Para obtener el máximo ingreso cada día hay que producir 12 unidades del producto A y 6 del B.
Con esta producción el máximo ingreso será de 690€.