OPCIÓN A

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 2. Dada la función $f(x)=\dfrac{x^2-2x-3}{x^2+x-2}$, se pide:

a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados. *(2 puntos)*
b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen. *(2 puntos)*
c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento. *(2 puntos)*
d) Los máximos y mínimos locales. *(2 puntos)*
e) La representación gráfica de la función a partir de los resultados obtenidos en los apartados anteriores. *(2 puntos)*

Solución:
a) Dominio,

$$x^2+x-2=0 \quad\rightarrow\quad x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot 1\cdot(-2)}}{2\cdot 1}=\frac{-1\pm 3}{2}=\begin{cases} x_1=\dfrac{-1+3}{2}=1 \\ x_2=\dfrac{-1-3}{2}=-2 \end{cases}$$

Luego $\quad Dom\, f(x)=\Re-\{-2,1\}$

Puntos de corte con los ejes coordenados,

$$x=0 \quad\rightarrow\quad f(0)=\frac{0^2-2\cdot 0-3}{0^2+0-2}=\frac{-3}{-2}=\frac{3}{2} \quad\rightarrow\quad \left(0,\frac{3}{2}\right)$$

$$f(x)=0 \quad\rightarrow\quad \frac{x^2-2x-3}{x^2+x-2}=0 \quad\rightarrow\quad x^2-2x-3=0 \quad\rightarrow\quad x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot 1\cdot(-3)}}{2\cdot 1}=$$

$$=\frac{2\pm 4}{2}=\begin{cases} x_1=\dfrac{2+4}{2}=3 \quad\rightarrow\quad (3,0) \\ x_2=\dfrac{2-4}{2}=-1 \quad\rightarrow\quad (-1,0) \end{cases}$$

Los puntos de corte de f(x) con los ejes coordenados son: $\left(0,\frac{3}{2}\right)$, ***(– 1 , 0) y (3 , 0).***

b) Asíntota horizontal y asíntota vertical.
Asíntota horizontal,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-2x-3}{x^2+x-2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}(1)=1$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-2x-3}{x^2+x-2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}(1)=1$$

Luego la asíntota horizontal de f(x) es y = 1

Asíntotas verticales.
Del dominio de la función deducimos que hay dos posibles A.V. x = – 2 y x = 1. Veámoslo,
x = – 2

$$\lim_{x\to-2}\frac{x^2-2x-3}{x^2+x-2}=\frac{(-2)^2-2(-2)-3}{(-2)^2+(-2)-2}=\frac{5}{0}=\infty \quad\rightarrow\quad x=-2 \quad es\ A.V.$$

x = 1

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-2x-3}{x^2+x-2}=\frac{1^2-2\cdot 1-3}{1^2+1-2}=\frac{-4}{0}=\infty \quad \to \quad x=1 \quad es\ A.V.$$

De la función su ***asíntota horizontal es y = 1*** *y* ***sus asíntotas verticales*** *son* ***x = – 2 y x = 1***.

c) Monotonía.

Estudiemos el signo de $f'(x)$

$$f'(x)=\frac{(2x-2)\cdot(x^2+x-2)-(x^2-2x-3)\cdot(2x+1)}{(x^2+x-2)^2}=$$

Efectuemos las operaciones del numerador,

$$\begin{array}{rrrr} & x^2 & +\ x & -\ 2 \\ \otimes & & 2x & -\ 2 \\ \hline & -\ 2x^2 & -\ 2x & +\ 4 \\ 2x^3 & +\ 2x^2 & -\ 4x & \\ \hline 2x^3 & & -\ 6x & +\ 4 \end{array} \qquad \begin{array}{rrrr} & x^2 & -\ 2x & -\ 3 \\ \otimes & & 2x & +\ 1 \\ \hline & +\ x^2 & -\ 2x & -\ 3 \\ 2x^3 & -\ 4x^2 & -\ 6x & \\ \hline 2x^3 & -\ 3x^2 & -\ 8x & -\ 3 \end{array} \qquad \begin{array}{rrrr} 2x^3 & & -\ 6x & +\ 4 \\ -2x^3 & +\ 3x^2 & +\ 8x & +\ 3 \\ \hline & 3x^2 & +\ 2x & +\ 7 \end{array}$$

$$=\frac{3x^2+2x+7}{(x^2+x-2)^2}$$

El denominador de $f'(x)$ está elevado al cuadrado, es positivo, por tanto el signo de $f'(x)$ sólo depende del numerador. Busquemos las raíces del numerador,

$$3x^2+2x+7=0 \quad \to \quad x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot 3\cdot 7}}{2\cdot 3}=\frac{-2\pm\sqrt{-80}}{6} \quad no\ existe$$

El numerador es un polinomio de 2º grado sin raíces y con coeficiente de x^2 positivo, por tanto el numerador es positivo. Obtenemos que $f'(x)$ es positiva, por tanto ***f(x) es creciente en su dominio.***

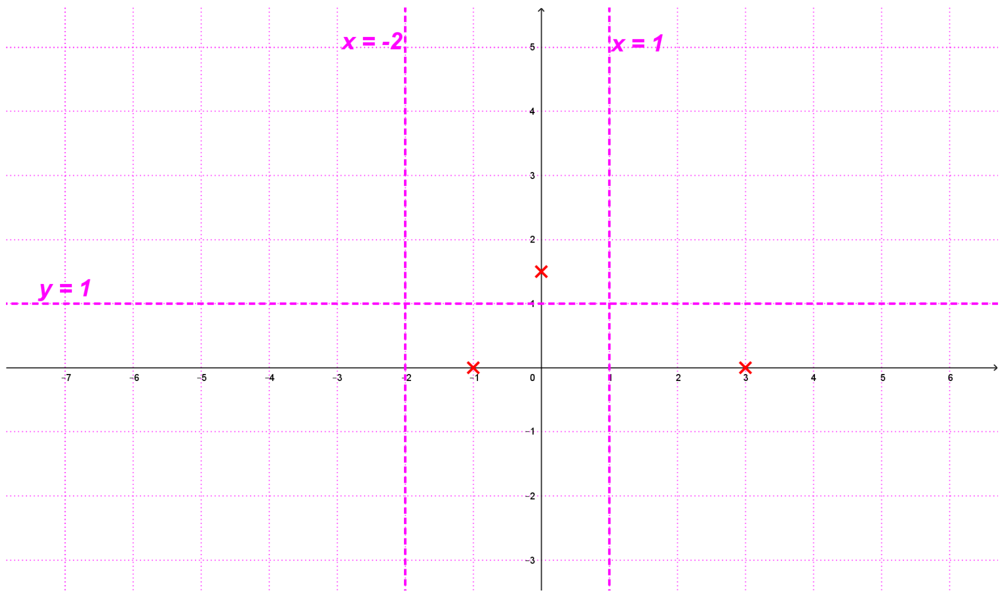
d) Máximos y mínimos locales.

Del estudio anterior, como f(x) es creciente en su dominio, ***f(x) no tiene ni máximos ni mínimos locales.***

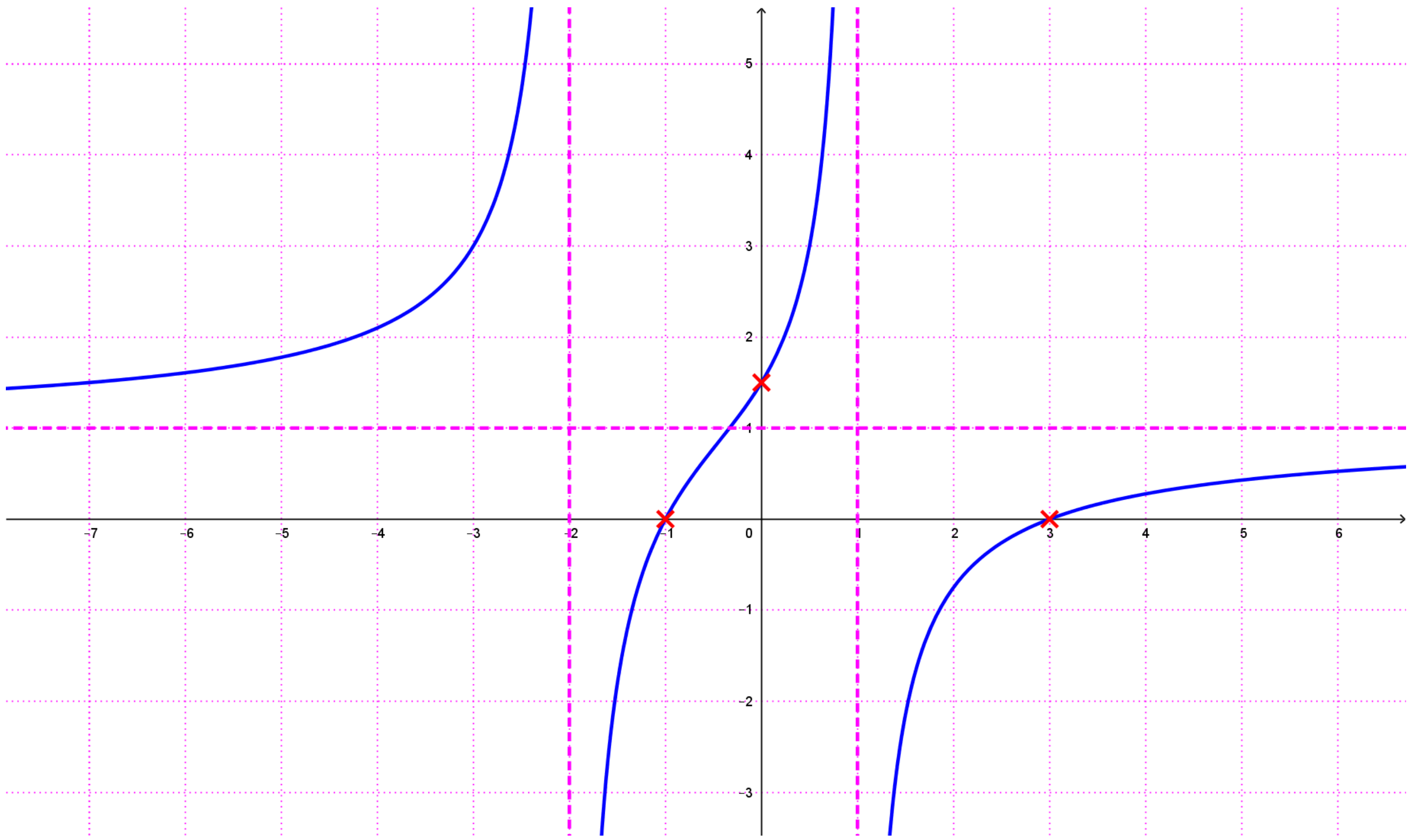
e) Representación gráfica.

Representemos los puntos de corte y asíntotas obtenidos en los apartados anteriores.

Dibujando estos elementos:



Considerando que la función es creciente en su dominio, la representación gráfica de f(x) es:

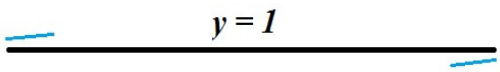


Si la representación no se obtiene tan directamente, como hay que realizarla a partir de los resultados obtenidos en los apartados anteriores, podemos completar los cálculos obteniendo la posición de la curva respecto de las asíntotas.
Que sería,

Posición de la curva respecto de la asíntota horizontal,

$$x=-1000 \quad \rightarrow \quad y=\frac{(-1000)^2-2\cdot(-1000)-3}{(-1000)^2+(-1000)-2}=1{\acute{}}0030...$$

$$x=1000 \quad \rightarrow \quad y=\frac{1000^2-2\cdot 1000-3}{1000^2+1000-2}=0{\acute{}}9970...$$

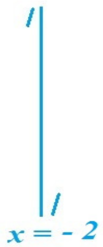


Posición de la curva respecto de las asíntotas verticales,

$$x=-2$$

$$\lim_{x\to -2^-}\frac{x^2-2x-3}{x^2+x-2}\overset{x=-2{\acute{}}1}{=}\frac{(-2{\acute{}}1)^2-2\cdot(-2{\acute{}}1)-3}{(-2{\acute{}}1)^2+(-2{\acute{}}1)-2}\infty=+\infty$$

$$\lim_{x\to -2^+}\frac{x^2-2x-3}{x^2+x-2}\overset{x=-1{\acute{}}9}{=}\frac{(-1{\acute{}}9)^2-2\cdot(-1{\acute{}}9)-3}{(-1{\acute{}}9)^2+(-1{\acute{}}9)-2}\infty=-\infty$$



$$x=1$$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-2x-3}{x^2+x-2}\overset{x=0{\acute{}}9}{=}\frac{0{\acute{}}9^2-2\cdot 0{\acute{}}9-3}{0{\acute{}}9^2+0{\acute{}}9-2}\infty=+\infty$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-2x-3}{x^2+x-2}\overset{x=1{\acute{}}1}{=}\frac{1{\acute{}}1^2-2\cdot 1{\acute{}}1-3}{1{\acute{}}1^2+1{\acute{}}1-2}\infty=-\infty$$

Añadiendo la posición de la curva respecto de las asíntotas en la primera gráfica de este apartado, la representación de la función resulta inmediata.