OPCIÓN B

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 1. Una matriz cuadrada A se dice que es ortogonal si tiene inversa y dicha inversa coincide con su matriz traspuesta. Dada la matriz

$$A=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

a) Calcula el determinante de A *(3 puntos)*

b) Comprueba que A es una matriz ortogonal. *(3 puntos)*

c) Resuelve el sistema de ecuaciones $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. *(4 puntos)*

Solución:

a) $/A/$.

$$|A|=\begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{vmatrix}=\left\{ sacando\ el\ factor\ \frac{1}{3}\ de\ cada\ fila \right\}=\left(\frac{1}{3}\right)^3\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{27}(4+4+4++8+8-1)=\frac{1}{27}\cdot 27=1$$

Solución: $/A/=1$.

b)¿A es ortogonal?

La matriz A *es ortogonal si* $\exists A^{-1}$ *y* $A^{-1}=A^t$

En el apartado anterior obtuvimos que $/A/=1\neq 0$, *por lo tanto* $\exists A^{-1}$.

Comprobemos que $A^{-1}=A^t$, *lo haremos calculando* $A\,.\,A^t\ (=A\,.\,A^{-1}=I)$

$$A\cdot A^t=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-2}{3} \\ \frac{-2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}=\left\{ sacamos\ el\ factor\ \frac{1}{3}\ de\ las\ dos\ matrices \right\}=$$

$$=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}\cdot\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1\cdot 1-2\cdot(-2)+2\cdot 2 & 1\cdot 2-2\cdot 2+2\cdot 1 & 1\cdot(-2)-2\cdot 1+2\cdot 2 \\ 2\cdot 1+2\cdot(-2)+1\cdot 2 & 2\cdot 2+2\cdot 2+1\cdot 1 & 2\cdot(-2)+2\cdot 1+1\cdot 2 \\ -2\cdot 1+1\cdot(-2)+2\cdot 2 & -2\cdot 2+1\cdot 2+2\cdot 1 & -2\cdot(-2)+1\cdot 1+2\cdot 2 \end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=I \quad c.q.c.$$

Solución: la matriz A es ortogonal.

c) Resolver el sistema:

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Multiplicando por la izquierda por A^{-1} ,

$$A^{-1}\,A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad I\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}=$$

Del apartado anterior sabemos que $A^{-1} = A^t$*, luego*
{utilizaremos la matriz A^t *como la escribimos en el apartado b)}, es decir:*

$$A^t=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1\cdot 1+2\cdot 1-2\cdot 1 \\ -2\cdot 1+2\cdot 1+1\cdot 1 \\ 2\cdot 1+1\cdot 1+2\cdot 1 \end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 3/5 \end{pmatrix}$$

La solución del sistema es: $x=\dfrac{1}{3}, \quad y=\dfrac{1}{3} \quad y \quad z=\dfrac{3}{5}.$