OPCIÓN B

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 2. Consideremos la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 3 & si \;\; x \le 1 \\ \dfrac{a\,x^2}{x^2+1} & si \;\; x > 1 \end{cases}$$

a) Calcula el valor de a para que la función sea continua en todo su dominio. *(2 puntos)*

b) Para el valor de a obtenido, calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función. *(3 puntos)*

c) Para el valor de a obtenido, calcula las asíntotas horizontales y verticales, si existen. *(2 puntos)*

d) Calcula $\int_{-2}^{1} f(x)\,dx$. *(3 puntos)*

Solución:

En la definición de la función f(x) hay dos ramas,

para $x \le 1$ $f(x) = x^2 - 3x + 3$ y esta función se puede calcular para cualquier valor de x.

para $x > 1$ $f(x) = \dfrac{a\,x^2}{x^2+1}$, como $x^2 + 1 > 0$ (para cualquier valor de x) el cociente se puede calcular.

Por tanto Dom f(x) = $\Re$

a) ¿Valor de a para que f(x) sea continua en su dominio?

Para $x \le 1$ f(x) es un polinomio luego es continua.

Para $x > 1$ f(x) es un cociente con el denominador distinto de cero luego es continua.

El problema para continuidad está en el cambio de definición, es decir, en $x = 1$.

Continuidad en $x = 1$,

a) $f(1) = 1^2 - 3 \cdot 1 + 3 = 1$

b) $\underset{x\to 1}{Lím}\, f(x) = \begin{cases} \underset{x\to 1^-}{Lím}\, f(x) = \underset{x\to 1^-}{Lím}\left(x^2 - 3x + 3\right) = 1 \\ \underset{x\to 1^+}{Lím}\, f(x) = \underset{x\to 1^+}{Lím}\dfrac{a\,x^2}{x^2+1} = \dfrac{a\cdot 1^2}{1^2+1} = \dfrac{a}{2} \end{cases}$ *Para que exista el límite* $1 = \dfrac{a}{2} \;\to\; a = 2$

c) Para $a = 2$ $f(1) = \underset{x\to 1}{Lím}\, f(x)$

Solución: para que f(x) sea continua en su dominio debe ser a = 2.

b) Para $a = 2$ ¿monotonía de f(x)?

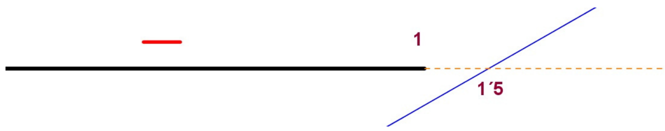
Como f(x) tiene dos ramas estudiamos la monotonía en cada una de ellas.

Primera rama, $y = x^2 - 3x + 3$, $x \le 1$

$y' = 2x - 3$, estudiemos el signo de y'.

$2x - 3 = 0 \;\to\; 2x = 3 \;\to\; x = \dfrac{3}{2} = 1'5$

$y' = 2x - 3$ es una recta de pendiente positiva que pasa por $x = 1'5$, luego



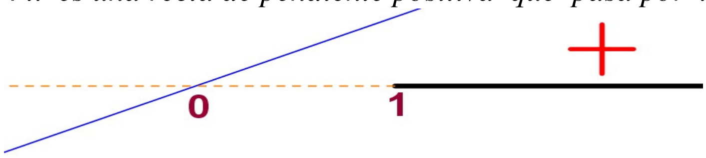
Segunda rama, $y = \dfrac{2\,x^2}{x^2+1}$, $\quad x > 1$

$$y' = \frac{4x\left(x^2+1\right) - 2\,x^2 \cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{4x^3 + 4x - 4\,x^3}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{4x}{\left(x^2+1\right)^2}$$

Como el denominador está elevado al cuadrado, es positivo; el signo de y' *depende del numerador.*

$4\,x = 0 \;\rightarrow\; x = 0$

$4\,x$ *es una recta de pendiente positiva que pasa por* $x = 0$*, luego*



Por tanto, ***f(x) es decreciente en*** $(\,-\infty, 1\,)$ ***y es creciente en*** $(\,1\,, +\infty)$**.**

c) Para $a = 2$*, asíntotas horizontales o verticales.*

La rama polinómica de f(x) no aporta asíntotas. Las posibles asíntotas estarán en la rama para $x > 1$*.*

Calculémoslas,

Asíntota vertical,

$\dfrac{2\,x^2}{x^2+1}$*, como* $x^2 + 1 > 0$*, el denominador no se anula, por lo que no hay asíntotas verticales.*

Asíntota horizontal,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2\,x^2}{x^2+1} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2\,x^2}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} (2) = 2\,,$$ *entonces* $y = 2$ *es una asíntota horizontal.*

Por tanto, ***f(x) no tiene asíntota vertical y su asíntota horizontal es*** $y = 2$**.**

d) $\displaystyle\int_{-2}^{1} f(x)\,dx\,.$

En el intervalo $[\,-2\,,\,1\,]$*,* $f(x) = x^2 - 3\,x + 3$*. Entonces,*

$$\int_{-2}^{1} f(x)\,dx = \int_{-2}^{1} \left(x^2 - 3x + 3\right) dx = \left[\frac{x^3}{3} - 3\,\frac{x^2}{2} + 3x\right]_{-2}^{1} =$$

$$= \left(\frac{1^3}{3} - 3\cdot\frac{1^2}{2} + 3\cdot 1\right) - \left(\frac{(-2)^3}{3} - 3\,\frac{(-2)^2}{2} + 3\cdot(-2)\right) = \frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 3 - \left(\frac{-8}{3} - 6 - 6\right) = \frac{33}{2} = 16{\acute{}}5$$

Por tanto, $\displaystyle\int_{-2}^{1} f(x)\,dx = 16{\acute{}}5\,.$