Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II Julio 2020

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 1. Para fertilizar una parcela de cultivo se utilizan dos tipos de fertilizantes, A y B. El cultivo de la parcela necesita un mínimo de 120 kilos de nitrógeno y 110 kilos de fósforo. El fertilizante A contiene un 25% de nitrógeno y un 15% de fósforo, siendo su precio de 1,2 euros el kilo, mientras que el fertilizante B contiene un 16% de nitrógeno y un 40% de fósforo y cuesta 1,6 euros el kilo.

a) ¿Qué cantidad se necesita de cada tipo de fertilizante para que el coste de la fertilización resulte mínimo? *(8 puntos)*
b) ¿Cuál es ese coste mínimo? *(2 puntos)*

Solución:
Llamando: x = *kilos del fertilizante A*
y = *kilos del fertilizante B*
Los datos del problema los resumimos en la tabla:

Fertilizante	*Kilos*	*Nitrógeno*	*Fósforo*	*Euros/kg*
A	*x*	*0´25 x*	*0´15 x*	*1´2*
B	*y*	*0´16 y*	*0´40 y*	*1´6*

y proporcionan las siguientes restricciones:
"se necesita un mínimo de 120 kg de nitrógeno" $\to 0'25\,x + 0'16\,y \geq 120$
"se necesita un mínimo de 110 kg de fósforo" $\to 0'15\,x + 0'40\,y \geq 110$
Como las variables x e y representan kilos de fertilizante deben ser mayores o iguales a cero.
El coste de la fertilización viene dado por la función: $z = 1'2\,x + 1'6\,y$

El problema a resolver es:

$$\text{minimizar} \quad z = 1'2\,x + 1'6\,y$$
$$\text{s.a.} \quad \begin{cases} 0'25x + 0'16y \geq 120 \\ 0'15x + 0'40y \geq 110 \\ x,\ y \geq 0 \end{cases}$$

Efectuamos los cálculos necesarios para la representación gráfica de las inecuaciones.

$(a)\quad 0'25x + 0'16y \geq 120$

$0'25x + 0'16y = 120$

$$\begin{array}{c|c} x & y \\ \hline 0 & \dfrac{120}{0'16} = 750 \\ \dfrac{120}{0'25} = 480 & 0 \end{array}$$

$¿(0,0)$ *cumple*?

$0'25 \cdot 0 + 0'16 \cdot 0 \geq 120 \quad No$

$(b)\quad 0'15x + 0'40y \geq 110$

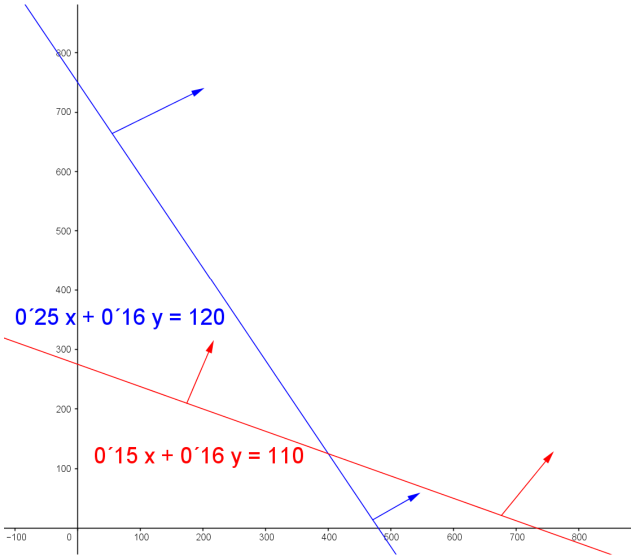
$0'15x + 0'40y = 110$

$$\begin{array}{c|c} x & y \\ \hline 0 & \dfrac{110}{0'40} = 275 \\ \dfrac{110}{0'15} = \dfrac{2200}{3} \cong 733'33 & 0 \end{array}$$

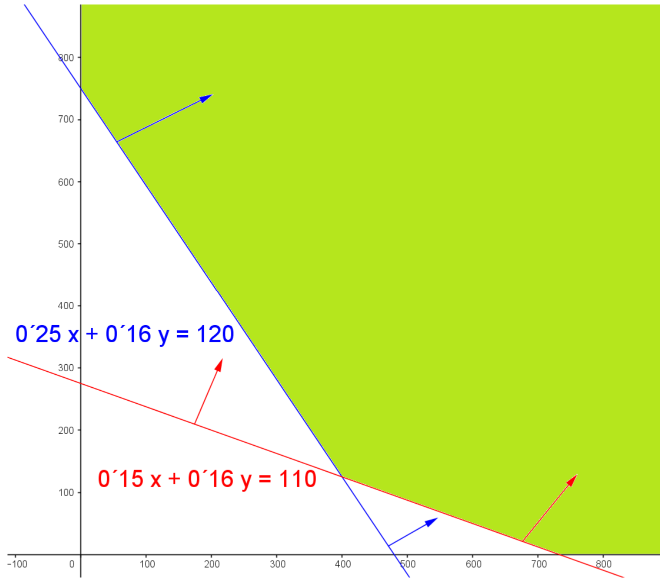
$¿(0,0)$ *cumple*?

$0'15 \cdot 0 + 0'40 \cdot 0 \geq 110 \quad No$

La representación gráfica será:



La región determinada por el sistema de inecuaciones (región factible) está formada por los puntos de la zona sombreada. Es una región factible abierta.



Vértices de la región factible:

el del eje horizontal y vertical los obtuvimos en los cálculos para la representación: $\left(\frac{2200}{3}, 0\right)$ *y* *(0 , 750). Falta el punto de corte entre las dos rectas.*

Corte entre (a) y (b):

$$\begin{cases} 0'25x + 0'16y = 120 \\ 0'15x + 0'4y = 110 \end{cases} \rightarrow \quad \begin{matrix} \\ *(-0'4) \end{matrix} \begin{cases} 0'25x + 0'16y = 120 \\ 0'15x + 0'4y = 110 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 0'25x + 0'16y = 120 \\ -0'06x - 0'16y = -44 \end{cases}$$

Sumando ambas ecuaciones: $0'19\,x = 76 \;\rightarrow\; x = \frac{76}{0'19} = 400$

Sustituyendo el valor de x en la 1ª ecuación,

$0'25 \,.\, 400 + 0'16\,y = 120; \quad 100 + 0'16\,y = 120; \quad 0'16\,y = 20; \quad y = \frac{20}{0'16} = 125$

Luego punto de corte (400 , 125)

Los vértices de la región factible son: (0 , 750), (400 , 125) y $\left(\frac{2200}{3}, 0\right)$.

El mínimo de la función z en la región se alcanzará en alguno de los vértices de la región. Calculemos los valores de la función en los vértices,

x , y	$z = 1'2\, x + 1'6\, y$	
$0 , 750$	$1'2 \cdot 0 + 1'6 \cdot 750 = 1200$	
$400 , 125$	$1'2 \cdot 400 + 1'6 \cdot 125 = 680$	*mínimo*
$\frac{2200}{3}, 0$	$1'2 \cdot \frac{2200}{3} + 1'6 \cdot 0 = 880$	

El mínimo se alcanza en el punto (400 , 125)

Por tanto,

a) ***Para que el coste de la fertilización resulte mínimo se necesitan 400 kg del fertilizante A y 125 kg del B.***

b) ***El coste mínimo será de 680€.***