Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 2. Dada la función $f(x)=\dfrac{2x^2-3x+5}{x^2-1}$, se pide:

a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados. *(2 puntos)*
b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen. *(2 puntos)*
c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento. *(2 puntos)*
d) Los máximos y mínimos locales. *(2 puntos)*
e) La representación gráfica de la función a partir de los resultados de los apartados anteriores. *(2 puntos)*

Solución:
a) Dominio,

$$x^2-1=0 \rightarrow x^2=1 \rightarrow x=\pm\sqrt{1}=\pm 1 \rightarrow Dom\ f(x)=\Re-\{-1,1\}$$

Puntos de corte con los ejes coordenados,

$$x=0 \rightarrow f(0)=\frac{2\cdot 0^2-3\cdot 0+5}{0^2-1}=-5 \rightarrow (0,-5)$$

$$f(x)=0 \rightarrow \frac{2x^2-3x+5}{x^2-1}=0 \rightarrow 2x^2-3x+5=0 \rightarrow x=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot 2\cdot 5}}{2\cdot 2}=$$

$$=\frac{3\pm\sqrt{-31}}{4} \quad \text{sin } solución$$

Sólo hay un punto de corte con los ejes coordenados, el (0 , – 5).

b) Asíntota horizontal y asíntota vertical.
Asíntota horizontal,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2-3x+5}{x^2-1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}2=2$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2-3x+5}{x^2-1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}2=2$$

, *la asíntota horizontal es y = 2.*

Asíntotas verticales.
Del dominio de la función deducimos que hay dos posibles A.V. x = – 1 y x = 1

$$\lim_{x\to-1}\frac{2x^2-3x+5}{x^2-1}=\frac{2(-1)^2-3(-1)+5}{(-1)^2-1}=\frac{10}{0}=\infty \rightarrow x=-1 \quad es\ A.V.$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x^2-3x+5}{x^2-1}=\frac{2\cdot 1^2-3\cdot 1+5}{1^2-1}=\frac{4}{0}=\infty \rightarrow x=1 \quad es\ A.V.$$

La asíntota horizontal es y = 2 y las asíntotas verticales son x = – 1 y x = 1.

c) Monotonía.

Estudiemos el signo de $f'(x)$

$$f'(x)=\frac{(4x-3)\cdot\left(x^2-1\right)-\left(2x^2-3x+5\right)\cdot 2x}{\left(x^2-1\right)^2}=\frac{4x^3-4x-3x^2+3-4x^3+6x^2-10x}{\left(x^2-1\right)^2}=\frac{3x^2-14x+3}{\left(x^2-1\right)^2}$$

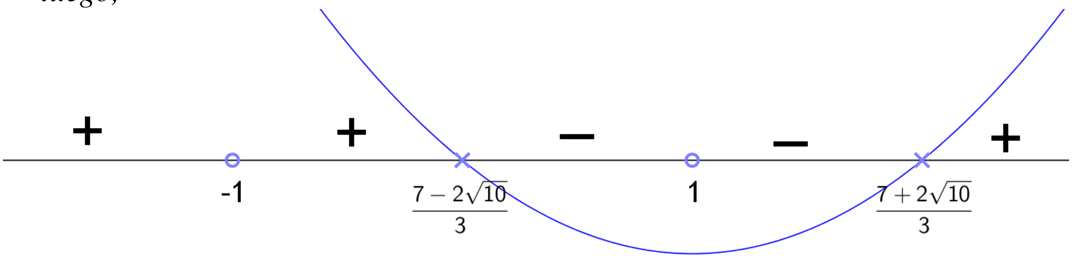
Obtengamos las raíces del numerador y denominador,

$$3x^2-14x+3=0 \quad\rightarrow\quad x=\frac{-(-14)\pm\sqrt{(-14)^2-4\cdot 3\cdot 3}}{2\cdot 3}=\frac{14\pm 4\sqrt{10}}{6}=\frac{7\pm 2\sqrt{10}}{3}=\begin{cases} x_1=\dfrac{7+2\sqrt{10}}{3}\cong 4'4415... \\ x_2=\dfrac{7-2\sqrt{10}}{3}\cong 0'2251... \end{cases}$$

$$\left(x^2-1\right)^2=0 \quad\rightarrow\quad x^2-1=0 \quad\rightarrow\quad \{resuelta\ en\ a)\} \quad x=\pm 1$$

Por tanto, debemos estudiar el signo de $f'(x)$ en los intervalos: ($\{-1,1\}\notin Dom\ f(x)$)

El denominador de $f'(x)$ está elevado al cuadrado, siempre será positivo. El signo de $f'(x)$ sólo depende del numerador que, gráficamente, es un polinomio de 2º grado con coeficiente de x^2 positivo y raíces $\dfrac{7\pm 2\sqrt{10}}{3}$, luego,



Por tanto,

f(x) es creciente en $(-\infty,-1)\cup\left(-1,\dfrac{7-2\sqrt{10}}{3}\right)\cup\left(\dfrac{7+2\sqrt{10}}{3},+\infty\right)$ ***y***

f(x) es decreciente en $\left(\dfrac{7-2\sqrt{10}}{3},1\right)\cup\left(1,\dfrac{7+2\sqrt{10}}{3}\right)$

d) Máximos y mínimos locales.

Del estudio anterior deducimos que para $x=\dfrac{7-2\sqrt{10}}{3}$ hay un máximo local y en $x=\dfrac{7+2\sqrt{10}}{3}$ hay un mínimo local.

$$x=\frac{7-2\sqrt{10}}{3} \quad\rightarrow\quad y=-4'662277... \qquad \text{Máximo local} \quad \left(\frac{7-2\sqrt{10}}{3},-4'662277...\right)\cong(0'225,-4'662)$$

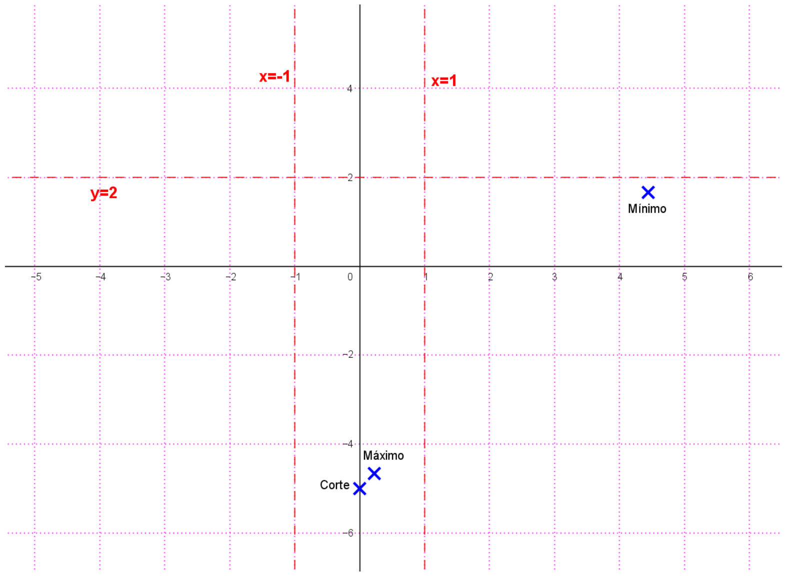
$$x=\frac{7+2\sqrt{10}}{3} \quad\rightarrow\quad y=1'662277... \qquad \text{Mínimo local} \quad \left(\frac{7+2\sqrt{10}}{3},1'662277...\right)\cong(4'441,1'662)$$

e) Representación gráfica.

De lo estudiado en los apartados anteriores sabemos:

Corte con ejes coordenados (0 , – 5), máximo local en (0´225, – 4´662), mínimo local en (4´441, 1´662); a.h. y = 2., a.v. x = – 1 y x = 1.

Representando gráficamente esta información:



Para completar la representación veamos la posición de la curva respecto de sus asíntotas.

A.H. $y = 2$

$$En -\infty, \quad x=-1000 \quad \to \quad y=\frac{2(-1000)^2-3(-1000)+5}{(-1000)^2-1}=2'003...$$

$$En +\infty, \quad x=1000 \quad \to \quad y=\frac{2\cdot 1000^2-3\cdot 1000+5}{1000^2-1}=1'997...$$

A.V. $x = -1$,

$$\lim_{x\to -1^-}\frac{2x^2-3x+5}{x^2-1}\overset{x=-1'1}{=}\frac{+}{+}\infty=+\infty$$

$$\lim_{x\to -1^+}\frac{2x^2-3x+5}{x^2-1}\overset{x=-0'9}{=}\frac{+}{-}\infty=-\infty$$

A.V. $x = 1$,

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{2x^2-3x+5}{x^2-1}\overset{x=0'9}{=}\frac{+}{-}\infty=-\infty$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{2x^2-3x+5}{x^2-1}\overset{x=1'1}{=}\frac{+}{+}\infty=+\infty$$

Considerando los intervalos de crecimiento y decrecimiento obtenidos, la representación gráfica de f(x) es: