Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 3. Si un habitante de la ciudad de Megalópolis es portador del anticuerpo A, entonces 2 veces de cada 5 es portador del anticuerpo B. Por el contrario, si no es portador del anticuerpo A, entonces 4 veces de cada 5 no es portador del anticuerpo B. Si sabemos que la mitad de la población es portadora del anticuerpo A, calcula:

a) La probabilidad de que un habitante de *Megalópolis* sea portador del anticuerpo B.
b) La probabilidad de que si un habitante de *Megalópolis* es portador del anticuerpo B lo sea también del anticuerpo A.
c) La probabilidad de que si un habitante de Megalópolis no es portador del anticuerpo B, tampoco lo sea del anticuerpo A.
d) La probabilidad de que un habitante de *Megalópolis* sea portador del anticuerpo A y no lo sea del anticuerpo B.

Solución:
Consideramos los siguientes sucesos:
A = el habitante es portador del anticuerpo A *B = el habitante es portador del anticuerpo B*

Considerando todos los datos del enunciado,

"si un habitante es portador de A, entonces 2 de cada 5 veces es portador del B" $\rightarrow$ $P\left(B/A\right)=\frac{2}{5}$

"si un habitante no es portador de A, entonces 4 de cada 5 veces no es portador del B" $\rightarrow$ $P\left(\overline{B}/\overline{A}\right)=\frac{4}{5}$

"la mitad de la población es portadora de A" $\rightarrow$ $P(A) = 0'5$

Como $P\left(B/A\right)=\frac{2}{5} \rightarrow \frac{P(B\cap A)}{P(A)}=\frac{2}{5} \rightarrow \frac{P(B\cap A)}{0'5}=\frac{2}{5} \rightarrow P(B\cap A)=0'5\cdot\frac{2}{5}=\frac{1}{5}$

Como $P(A) = 0'5 \rightarrow P(\overline{A})=1-P(A)=1-0'5=0'5$

Como $P\left(\overline{B}/\overline{A}\right)=\frac{4}{5} \rightarrow \frac{P(\overline{B}\cap\overline{A})}{P(\overline{A})}=\frac{4}{5} \rightarrow \frac{P(\overline{B}\cap\overline{A})}{0'5}=\frac{4}{5} \rightarrow P(\overline{B}\cap\overline{A})=0'5\cdot\frac{4}{5}=\frac{2}{5}$

a) Probabilidad de que un habitante de Megalópolis sea portador del anticuerpo B.
La probabilidad pedida es: P(B).

$$P(B)=P\left(B\cap\left(A\cup\overline{A}\right)\right)=P\left(\left(B\cap A\right)\cup\left(B\cap\overline{A}\right)\right)=P(B\cap A)+P\left(B\cap\overline{A}\right)-P\left(\left(B\cap A\right)\cap\left(B\cap\overline{A}\right)\right)=(*)$$

$$\left(B\cap A\right)\cap\left(B\cap\overline{A}\right)=B\cap A\cap\overline{A}=\varnothing,\quad \textit{luego}\quad P\left(\left(B\cap A\right)\cap\left(B\cap\overline{A}\right)\right)=P(\varnothing)=0$$

$$(*)=P(B\cap A)+P\left(B\cap\overline{A}\right)-0=P(B\cap A)+P\left(B\cap\overline{A}\right)=\frac{1}{5}+P\left(B\cap\overline{A}\right)$$

Calculemos $P\left(B\cap\overline{A}\right)$

$$P\left(\overline{A}\right)=P\left(\overline{A}\cap\left(B\cup\overline{B}\right)\right)=P\left(\left(\overline{A}\cap B\right)\cup\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)\right)=P\left(\overline{A}\cap B\right)+P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)-P\left(\left(\overline{A}\cap B\right)\cap\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)\right)=$$

de forma análoga al cálculo anterior

$$=P\left(\overline{A}\cap B\right)+P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)-P(\varnothing)=P\left(\overline{A}\cap B\right)+P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)-0=P\left(\overline{A}\cap B\right)+P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)$$

luego, $0'5=P\left(\overline{A}\cap B\right)+\frac{2}{5};\quad P\left(\overline{A}\cap B\right)=0'5-\frac{2}{5}=\frac{1}{10}$

Finalmente, $P(B)=\frac{1}{5}+\frac{1}{10}=\frac{3}{10}$

b) Probabilidad de que si un habitante de Megalópolis es portador del anticuerpo B lo sea también del anticuerpo A.

La probabilidad pedida es: $P\left(A/B\right)$

$$P\left(A/B\right)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{5}}{\frac{3}{10}}=\frac{2}{3}$$

c) Probabilidad de que si un habitante de Megalópolis no es portador del anticuerpo B, tampoco lo sea del anticuerpo A.

La probabilidad pedida es: $P\left(\overline{A}/\overline{B}\right)$

$$P\left(\overline{A}/\overline{B}\right)=\frac{P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)}{P\left(\overline{B}\right)}=\frac{\frac{2}{5}}{1-P(B)}=\frac{\frac{2}{5}}{1-\frac{3}{10}}=\frac{\frac{2}{5}}{\frac{7}{10}}=\frac{4}{7}$$

d) Probabilidad de que un habitante de Megalópolis sea portador del anticuerpo A y no lo sea del anticuerpo B.

La probabilidad pedida es: $P\left(A\cap\overline{B}\right)$.

$$P\left(\overline{B}\right)=P\left(\overline{B}\cap\left(A\cup\overline{A}\right)\right)=P\left(\left(\overline{B}\cap A\right)\cup\left(\overline{B}\cap\overline{A}\right)\right)=P\left(\overline{B}\cap A\right)+P\left(\overline{B}\cap\overline{A}\right)-P\left(\left(\overline{B}\cap A\right)\cap\left(\overline{B}\cap\overline{A}\right)\right)=(*)$$

$$\left(\overline{B}\cap A\right)\cap\left(\overline{B}\cap\overline{A}\right)=\overline{B}\cap A\cap\overline{A}=\varnothing,\quad \textit{luego}\quad P\left(\left(\overline{B}\cap A\right)\cap\left(\overline{B}\cap\overline{A}\right)\right)=P(\varnothing)=0$$

$$(*)=P\left(\overline{B}\cap A\right)+P\left(\overline{B}\cap\overline{A}\right)-0=P\left(\overline{B}\cap A\right)+P\left(\overline{B}\cap\overline{A}\right)$$

luego, $P\left(\overline{B}\right)=P\left(\overline{B}\cap A\right)+P\left(\overline{B}\cap\overline{A}\right)$

$$1-P(B)=P\left(\overline{B}\cap A\right)+P\left(\overline{B}\cap\overline{A}\right)$$

$$1-\frac{3}{10}=P\left(\overline{B}\cap A\right)+\frac{2}{5};\quad \frac{7}{10}=P\left(\overline{B}\cap A\right)+\frac{2}{5};\quad P\left(\overline{B}\cap A\right)=\frac{7}{10}-\frac{2}{5}=\frac{3}{10}$$

Por tanto, $P\left(A\cap\overline{B}\right)=\frac{3}{10}$