

**Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas**

**Problema 4.** Dada las matrices  $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ , se pide:

- a) Halla la matriz inversa de  $A$ . (3 puntos)  
 b) Explica porque la matriz  $B$  no tiene inversa. (2 puntos)  
 c) Razona porque la matriz  $AB$  no tiene inversa. (2 puntos)  
 d) Resuelve la ecuación matricial  $AB - AX = BA$ . (3 puntos)

*Solución:*

a)  $A^{-1}$ .

$$\text{Como } |A| = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 5 = -1 \neq 0 \rightarrow \exists A^{-1}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \{\text{menores}\} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \{\text{adjuntos}\} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \{\text{traspuesta}\} \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Luego, } A^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Solución: } A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

b) ¿No existe  $B^{-1}$ ?

$$\text{Como } |B| = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0 \rightarrow \text{No existe } B^{-1}$$

c) ¿No existe  $(AB)^{-1}$ ?

$A$  y  $B$  son matrices cuadradas de orden 2, luego  $AB$  también es cuadrada de orden 2.

El determinante del producto de dos matrices es el producto de los determinantes de ellas,

$|AB| = |A| |B| = -1 \cdot 0 = 0$ , por lo que no existe  $(AB)^{-1}$ .

d) Resolver  $AB - AX = BA$ .

Despejemos  $X$ ,

$$AB - AX = BA; \quad AB - BA = AX, \quad \text{como existe } A^{-1}$$

Multiplicando, por la izquierda por  $A^{-1}$

$$A^{-1}(AB - BA) = A^{-1}AX$$

$$A^{-1}AB - A^{-1}BA = A^{-1}AX \quad \{\text{como } A^{-1}A = I\}$$

$$B - A^{-1}BA = X;$$

Calculemos  $A^{-1}BA$

$$B A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 + 4 \cdot 1 & 2 \cdot 5 + 4 \cdot 2 \\ 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot 5 + 2 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 18 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} B A = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 18 \\ 4 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

**Solución:**  $X = \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$