Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 5. Una empresa farmacéutica lanza al mercado un nuevo fármaco que se distribuye en cajas de seis unidades. La relación entre el precio de cada caja y el beneficio mensual obtenido en euros viene dada por la función

$$B(x) = -x^2 + 16x - 55,$$

donde x es el precio de venta de una caja. Se pide:

a) ¿Qué beneficio obtiene cuando vende cada caja a 6 euros? *(2 puntos)*

b) ¿Entre qué valores debe fijar el precio de venta de cada caja para obtener beneficios? *(2 puntos)*

c) Calcula a qué precio ha de vender cada caja para que el beneficio sea máximo. ¿Cuál es el beneficio máximo? *(2+1 puntos)*

d) ¿Entre qué valores el beneficio crece y entre qué valores el beneficio decrece? *(3 puntos)*

Solución:

$B(x) = -x^2 + 16x - 55$; x precio de venta de cada caja, $B(x)$ beneficio mensual. Como x es el precio de venta entonces $\text{Dom } B(x) = [\,0, +\infty\,)$

a) ¿$B(x)$ para $x = 6$?

$B(6) = -6^2 + 16 \cdot 6 - 55 = 5$

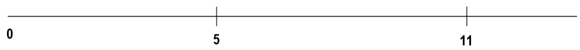
Al vender cada caja a 6€ obtiene un beneficio de 5€.

b) ¿x? / $B(x) > 0$

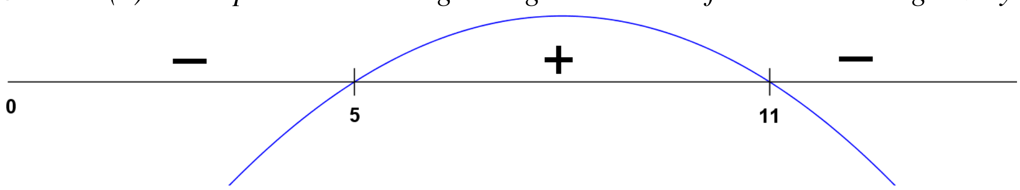
$$-x^2 + 16x - 55 > 0$$

$$-x^2 + 16x - 55 = 0 \quad \rightarrow \quad x = \frac{-16 \pm \sqrt{16^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-55)}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-16 \pm 6}{-2} = \begin{cases} x_1 = \dfrac{-16+6}{-2} = 5 \\[2ex] x_2 = \dfrac{-16-6}{-2} = 11 \end{cases}$$

Hay que estudiar el signo de $B(x)$ en los intervalos:



Como $B(x)$ es un polinomio de segundo grado con coeficiente de x^2 negativo y raíces 5 y 11,



Luego, ***para obtener beneficios el precio de venta de cada caja debe estar entre 5 y 11 euros.***

c) ¿x? / $B(x)$ sea máximo.

Como $B(x)$ es un polinomio de 2º grado y considerando lo calculado en el apartado anterior, el beneficio máximo se alcanza en el vértice de la parábola, $x = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-16}{2(-1)} = 8$.

Obtendremos el mismo resultado estudiando el signo de $B'(x)$:

$B'(x) = -2x + 16$

$-2x + 16 = 0; \quad 16 = 2x; \quad x = \dfrac{16}{2} = 8$

Estudiemos el signo de $B'(x)$ a ambos lados de $x = 8$,

x	$B'(x)=-2x+16$
7	$-2\cdot 7+16=\quad +$
9	$-2\cdot 9+16=\quad -$

A la izquierda positivo y a la derecha negativo, en x = 8 hay un máximo relativo que es el absoluto por ser la función B(x) a la izquierda creciente y a la derecha decreciente.

$B(8) = -8^2 + 16 \,.\, 8 - 55 = 9$

Por tanto, ***para que el beneficio sea máximo debe vender cada caja a 8 euros, en este caso el beneficio será de 9 euros mensuales.***

d) Según obtuvimos en el apartado c) (signo de B(x)):
El beneficio crece en el intervalo (0 , 8) y decrece en el intervalo (8 , +∞).