Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 2. Consideramos las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

a) Calcula la inversa de la matriz $A - B$. *(3 puntos)*
b) Calcula la matriz X de dimensión 2x3, que satisface la ecuación $X\,A + C = X\,B$. *(4 puntos)*
c) ¿Es posible hacer el producto $B\,C$? Si la respuesta es afirmativa calcula dicho producto; en caso contrario, justifica el porqué. ¿Es posible hacer el producto $C\,B$? Si la respuesta es afirmativa calcula dicho producto; en caso contrario, justifica el porqué. *(3 puntos)*

Solución:
a) Cálculo de $(A-B)^{-1}$.

$$A - B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculemos /A – B/, $|A-B| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$

Como /A/ $\neq 0$ $\rightarrow$ existe $(A-B)^{-1}$. Procedamos a su cálculo,

$$A - B \xrightarrow{menores} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -3 \\ 6 & 4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{adjuntos} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \\ 6 & -4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{traspuesta} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 2 & -2 & -4 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Finalmente, $(A-B)^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 2 & -2 & -4 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1/3 & -1/3 & -2/3 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$

b) ¿Matriz X? / $X\,A + C = X\,B$
Veamos si podemos despejar X,
$X\,A - X\,B = -C$; $X\,(A-B) = -C$
Como existe $(A-B)^{-1}$, multiplicando por la derecha por $(A-B)^{-1}$, $X\,(A-B)\,(A-B)^{-1} = -C\,(A-B)^{-1}$
Como $(A-B)\,(A-B)^{-1} = I$, $X\,I = -C\,(A-B)^{-1} \rightarrow X = -C\,(A-B)^{-1}$
Procedamos al cálculo de X,

$$C\,(A-B)^{-1}=\begin{pmatrix}5&3&0\\2&1&2\end{pmatrix}\frac{1}{6}\begin{pmatrix}0&0&6\\2&-2&-4\\0&3&0\end{pmatrix}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}5&3&0\\2&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&6\\2&-2&-4\\0&3&0\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}5\cdot 0+3\cdot 2+0\cdot 0 & 5\cdot 0+3\cdot(-2)+0\cdot 3 & 5\cdot 6+3\cdot(-4)+0\cdot 0\\ 2\cdot 0+1\cdot 2+2\cdot 0 & 2\cdot 0+1\cdot(-2)+2\cdot 3 & 2\cdot 6+1\cdot(-4)+2\cdot 0\end{pmatrix}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}6&-6&18\\2&4&8\end{pmatrix}$$

Finalmente, $X=-C\,(A-B)^{-1}=-\frac{1}{6}\begin{pmatrix}6&-6&18\\2&4&8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1&-3\\-1/3&-2/3&-4/3\end{pmatrix}$

Por tanto, $X=\begin{pmatrix}-1&1&-3\\-1/3&-2/3&-4/3\end{pmatrix}$.

c) ¿Es posible hacer el producto B C?
B es una matriz 3 x 3 y C es 2 x 3, el producto B C no puede realizarse porque el número de columnas de B (3) es distinto del número de filas de C (2).

¿Es posible hacer el producto C B?
C es una matriz 2 x 3 y B es 3 x 3, el producto C B puede efectuarse porque nº de columnas de C = nº de filas de B = 3 y el resultado será una matriz 2 x 3.

$$C\,B=\begin{pmatrix}5&3&0\\2&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&2\\1&1&1\\0&3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\cdot 0+3\cdot 1+0\cdot 0 & 5\cdot 0+3\cdot 1+0\cdot 3 & 5\cdot 2+3\cdot 1+0\cdot 1\\ 2\cdot 0+1\cdot 1+2\cdot 0 & 2\cdot 0+1\cdot 1+2\cdot 3 & 2\cdot 2+1\cdot 1+2\cdot 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&3&13\\1&7&7\end{pmatrix}$$

Solución: $C\,B=\begin{pmatrix}3&3&13\\1&7&7\end{pmatrix}$