Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 3. Dada la función $f(x)=\dfrac{x^2-36}{x^2-2x-8}$, se pide:

a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados. *(2 puntos)*
b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen. *(2 puntos)*
c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento. *(2 puntos)*
d) Los máximos y mínimos locales. *(2 puntos)*
e) La representación gráfica de la función a partir de los resultados de los apartados anteriores. *(2 puntos)*

Solución:
a) Dominio,

$$x^2-2x-8=0 \;\rightarrow\; x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot 2\cdot(-8)}}{2\cdot 1}=\frac{2\pm\sqrt{4+32}}{2}=\frac{2\pm 6}{2}=\begin{cases} x_1=\dfrac{2+6}{2}=4 \\ x_2=\dfrac{2-6}{2}=-2\end{cases}$$

$$\rightarrow \quad Dom\ f(x)=\Re-\{-2,4\}$$

Puntos de corte con los ejes coordenados,

$$x=0 \;\rightarrow\; f(0)=\frac{0^2-36}{0^2-2\cdot 0-8}=\frac{-36}{-8}=\frac{9}{2} \;\rightarrow\; \left(0,\frac{9}{2}\right)$$

$$f(x)=0 \;\rightarrow\; \frac{x^2-36}{x^2-2x-8}=0 \;\rightarrow\; x^2-36=0 \;\rightarrow\; x^2=36 \;\rightarrow\; x=\pm\sqrt{36}=\pm 6\begin{cases}(-6,0)\\(6,0)\end{cases}$$

Los puntos de corte con los ejes coordenados son: $\left(0,\dfrac{9}{2}\right)$, ***(– 6 , 0) y (6 , 0).***

b) Asíntota horizontal y asíntota vertical.
Asíntota horizontal,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-36}{x^2-2x-8}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}1=1$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-36}{x^2-2x-8}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}1=1$$

, *la asíntota horizontal es y = 1.*

Asíntotas verticales.
Del dominio de la función deducimos que hay dos posibles A.V. x = – 2 y x = 4

$$\lim_{x\to-2}\frac{x^2-36}{x^2-2x-8}=\frac{(-2)^2-36}{(-2)^2-2(-2)-8}=\frac{-32}{0}=\infty \;\rightarrow\; x=-2 \quad es\ A.V.$$

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-36}{x^2-2x-8}=\frac{4^2-36}{4^2-2\cdot 4-8}=\frac{-20}{0}=\infty \;\rightarrow\; x=4 \quad es\ A.V.$$

La asíntota horizontal es y = 1 y las asíntotas verticales son x = – 2 y x = 4.

c) Monotonía.

Estudiemos el signo de $f'(x)$

$$f'(x)=\frac{2x\cdot\left(x^2-2x-8\right)-\left(x^2-36\right)\cdot(2x-2)}{\left(x^2-2x-8\right)^2}=\frac{2x^3-4x^2-16x-2x^3+2x^2+72x-72}{\left(x^2-2x-8\right)^2}=\frac{-2x^2+56x-72}{\left(x^2-2x-8\right)^2}$$

Obtengamos las raíces del numerador y denominador,

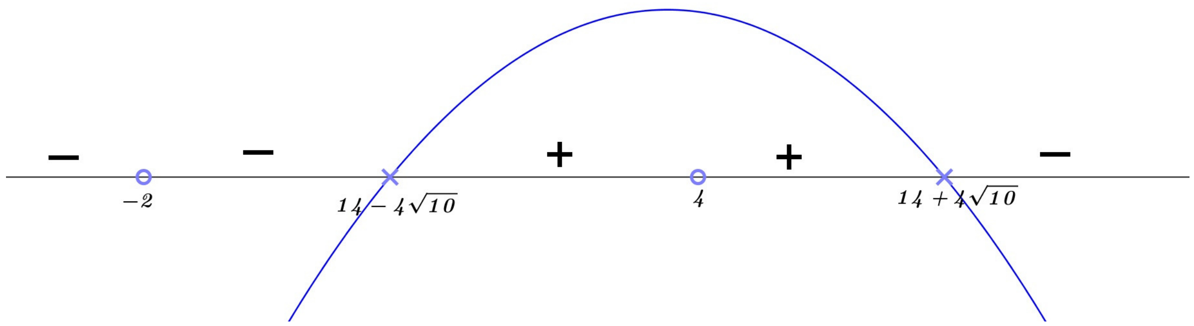
$$-2x^2+56x-72=0 \quad\rightarrow\quad x=\frac{-56\pm\sqrt{56^2-4\cdot(-2)\cdot(-72)}}{2\cdot(-2)}=\frac{-56\pm 16\sqrt{10}}{-4}=14\pm 4\sqrt{10}=$$

$$=\begin{cases} x_1=14-4\sqrt{10}\cong 1'3509 \\ x_2=14+4\sqrt{10}\cong 26'6491\end{cases}$$

$$\left(x^2-2x-8\right)^2=0 \quad\rightarrow\quad x^2-2x-8=0 \quad\rightarrow\quad \{\text{resuelta en } a)\} \quad x=-2 \text{ y } 4$$

Por tanto, debemos estudiar el signo de $f'(x)$ *en los intervalos:* ($\{-2,4\}\notin Dom\ f(x)$)

El denominador de f´(x) está elevado al cuadrado, siempre será positivo. El signo de f´(x) sólo depende del numerador que, gráficamente, es un polinomio de 2º grado con coeficiente de x^2 *negativo y raíces* $14\pm 4\sqrt{10}$, *luego,*



Por tanto,

f(x) es creciente en $\left(14-4\sqrt{10},4\right)\cup\left(4,14+4\sqrt{10}\right)$ ***y***

f(x) es decreciente en $(-\infty,-2)\cup\left(-2,14-4\sqrt{10}\right)\cup\left(14+4\sqrt{10},+\infty\right)$

d) Máximos y mínimos locales.

Del estudio anterior deducimos que para $x_1 = 14-4\sqrt{10}$ *hay un mínimo local y en* $x_2 = 14+4\sqrt{10}$ *hay un máximo local.*

$$f(x_1)=\frac{\left(14-4\sqrt{10}\right)^2-36}{\left(14-4\sqrt{10}\right)^2-2\left(14-4\sqrt{10}\right)-8}\cong 3'8499 \quad\rightarrow\quad \text{Mínimo local} \quad \left(14-4\sqrt{10},3'8499\right)\cong(1'35,3'85)$$

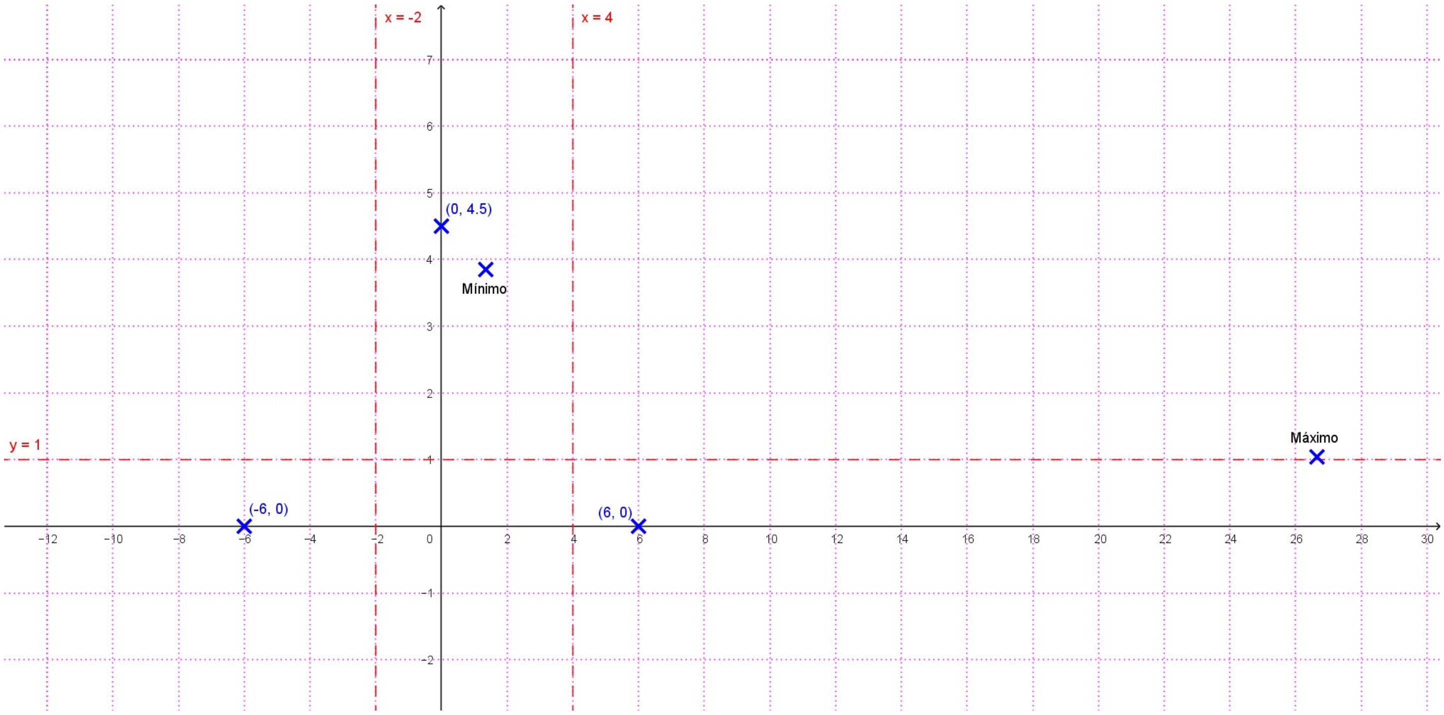
$$f(x_2)=\frac{\left(14+4\sqrt{10}\right)^2-36}{\left(14+4\sqrt{10}\right)^2-2\left(14+4\sqrt{10}\right)-8}\cong 1'0380 \quad\rightarrow\quad \text{Máximo local} \quad \left(14+4\sqrt{10},1'0380\right)\cong(26'65,1'04)$$

e) Representación gráfica.

De lo estudiado en los apartados anteriores sabemos:

Corte con ejes coordenados $\left(0,\frac{9}{2}\right)$, *(– 6 , 0) y (6 , 0), mínimo local en (1´35, 3´85), máximo local en (26´65, 1´04); a.h. y = 1, a.v. x = – 2 y x = 4.*

Representando gráficamente esta información:



Si con esta información la representación no queda definida, podemos obtener la posición de la curva respecto de sus asíntotas.

A.H. $y = 1$

$$En - \infty, \quad x = -1000 \quad \rightarrow \quad y = \frac{(-1000)^2 - 36}{(-1000)^2 - 2(-1000) - 8} = 0'997...$$

$$En + \infty, \quad x = 1000 \quad \rightarrow \quad y = \frac{1000^2 - 36}{1000^2 - 2 \cdot 1000 - 8} = 1'001...$$

A.V. $x = -2$,

$$\lim_{x \to -2^-} \frac{x^2 - 36}{x^2 - 2x - 8} \overset{x=-2'1}{=} \frac{-}{+}\infty = -\infty$$

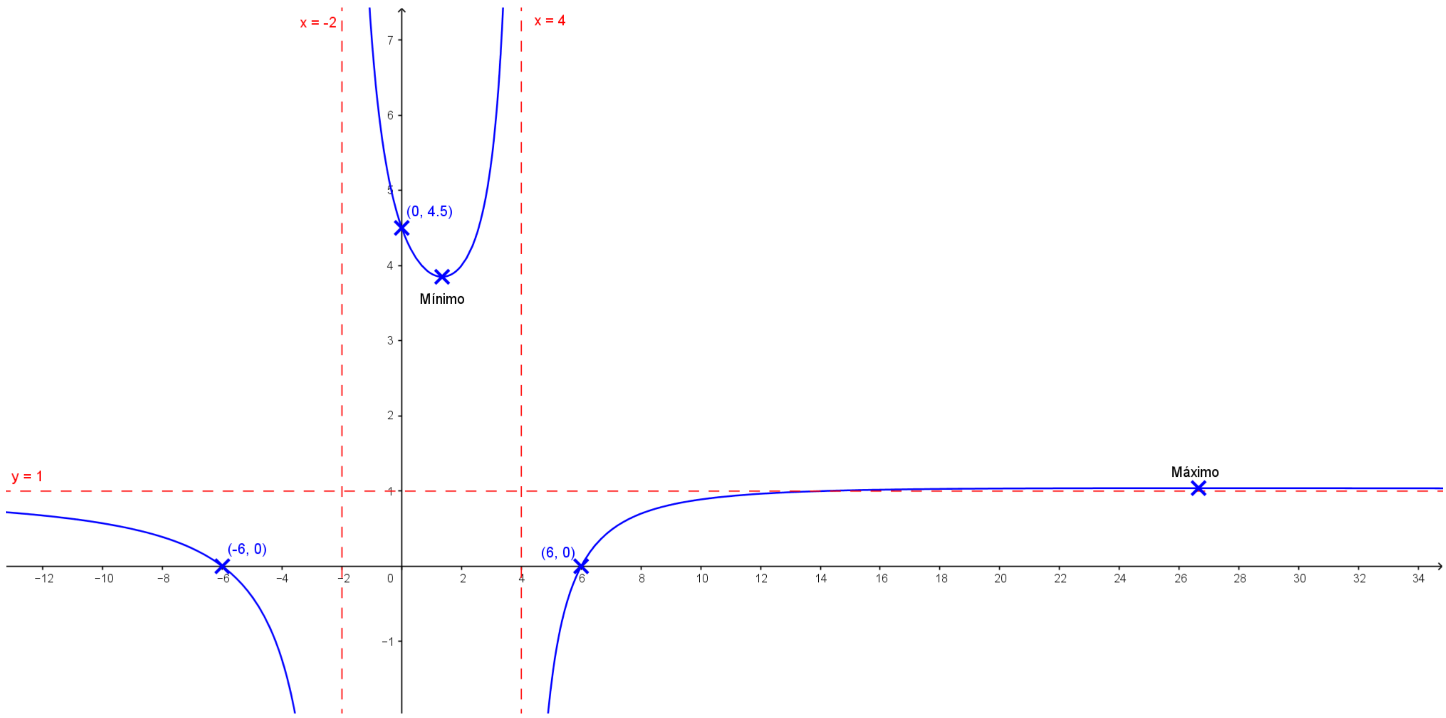
$$\lim_{x \to -2^+} \frac{x^2 - 36}{x^2 - 2x - 8} \overset{x=-1'9}{=} \frac{-}{-}\infty = +\infty$$

A.V. $x = 4$,

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{2x^2 - 3x + 5}{x^2 - 1} \overset{x=0'9}{=} \frac{+}{-}\infty = -\infty$$

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{2x^2 - 3x + 5}{x^2 - 1} \overset{x=1'1}{=} \frac{+}{+}\infty = +\infty$$

Considerando los intervalos de crecimiento y decrecimiento obtenidos, la representación gráfica de f(x) es:



Si nos acercamos al máximo local: