Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 4. Una empresa ha estimado que los ingresos y gastos mensuales (en euros) que genera la fabricación de x unidades de un producto vienen dados por las siguientes funciones:

Ingresos: $I(x) = 4x^2 + 800x$, Gastos: $G(x) = 6x^2 + 460x + 672$

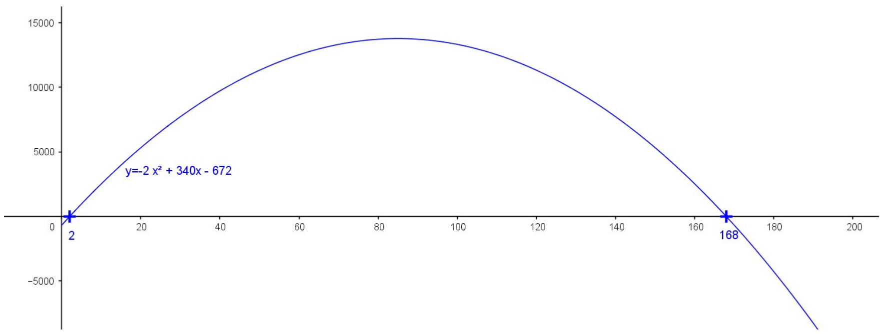
a) La empresa considera rentable el producto si el beneficio que obtiene con él es mayor o igual que 0. ¿Cuál es el número mínimo de unidades que debe fabricar la empresa para que el producto sea rentable? *(4 puntos)*
b) ¿Cuál es el número de unidades que debe fabricar la empresa para que el beneficio sea máximo? ¿Cuál es el beneficio obtenido en este caso? *(3 puntos)*
c) El próximo mes se introducirá una nueva normativa que obligará a la empresa a fabricar al menos 100 unidades de este producto. ¿Cuál es el máximo beneficio que podrá obtener la empresa tras la implantación de esta normativa? Justifica tu respuesta. *(3 puntos)*

Solución:
Llamando $B(x)$ al beneficio proporcionado por x unidades,
$B(x) = I(x) - G(x) = 4x^2 + 800x - 6x^2 - 460x - 672 = -2x^2 + 340x - 672$
Como x es número de unidades, entonces $\text{Dom } B(x) = [0, +\infty)$

a) ¿$x / B(x) \geq 0$?
Debemos resolver la inecuación: $-2x^2 + 340x - 672 \geq 0$

$$-2x^2 + 340x - 672 = 0 \quad \rightarrow \quad x = \frac{-340 \pm \sqrt{340^2 - 4\cdot(-2)\cdot(-672)}}{2\cdot(-2)} = \frac{-340 \pm 332}{-4} = \begin{cases} x_1 = \dfrac{-340+332}{-4} = 2 \\ x_2 = \dfrac{-340-332}{-4} = 168 \end{cases}$$

$B(x)$ es un polinomio de 2º grado con coeficiente de x^2 negativo y raíces 2 y 168, gráficamente:



Por tanto $B(x) \geq 0$ cuando $x \geq 2$.

El número mínimo de unidades que debe fabricar para que el producto sea rentable es 2 (y como máximo 168).

b) ¿x? / $B(x)$ *sea máximo.*
Como $B(x)$ es un polinomio de 2º grado, que hemos representado antes, el máximo se alcanza en el vértice de la parábola,

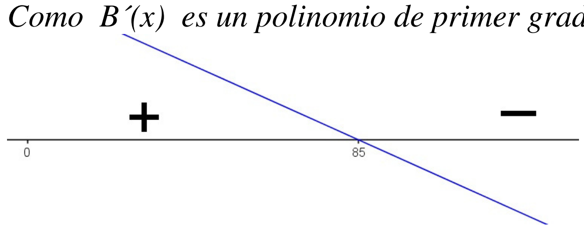
$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-340}{2(-2)} = \frac{-340}{-4} = 85$$

Otra forma de encontrar el máximo de $B(x)$ es estudiar el signo de $B'(x)$:
$B'(x) = -4x + 340$

$-4x + 340 = 0; \quad 4x = 340; \quad x = \dfrac{340}{4} = 85$

Hay que estudiar el signo de $B'(x)$ en los intervalos: $(0, 85)$ y $(85, +\infty)$

Como $B'(x)$ es un polinomio de primer grado con coeficiente de x negativo y raíz 85,

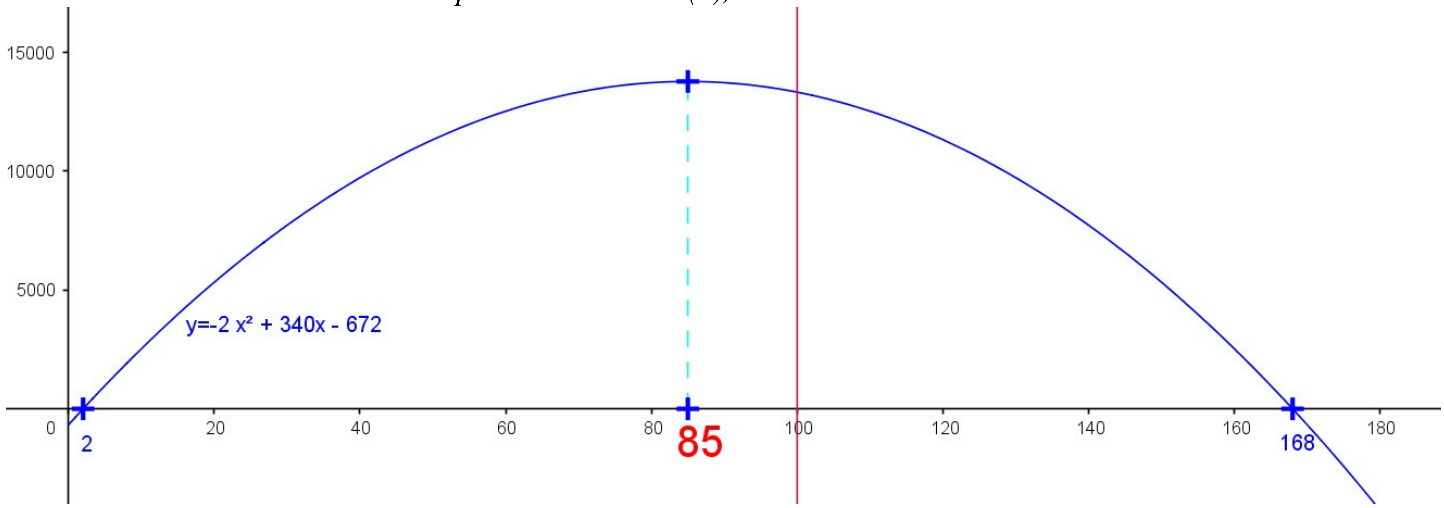


Luego, en $x = 85$ hay un máximo relativo que es el absoluto de $B(x)$ ya que la función a la derecha es creciente y a la izquierda decreciente.

Para $x = 85$, $B(85) = -2 \cdot 85^2 + 340 \cdot 85 - 672 = 13778$.

Solución: para que el beneficio sea máximo la empresa debe fabricar 85 unidades y, en este caso, el beneficio será de 13778 €.

c) *La empresa debe fabricar, al menos, 100 unidades. ¿x? / B(x) sea máximo.*
Añadiendo esta restricción en la representación de B(x),



Como $B(x)$, a partir de $x = 85$ es decreciente, cuando $x \geq 100$ la función alcanza su máximo en este valor $x = 100$.
$B(100) = -2 \cdot 100^2 + 340 \cdot 100 - 672 = 13328$.

Por tanto, ***el máximo beneficio que podrá obtener la empresa tras la implantación de la nueva normativa es de 13328 €.***