

OPCIÓN B

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 1. Consideramos las matrices $A = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix}$ y $C = (-2 \ -2)$.

a) Justifica cuales de las siguientes operaciones se pueden realizar y efectúa las que sean realizables.

a.1) $B + 2CA$ (1 punto)

a.2) $A - (BC)^T$, siendo $(BC)^T$ la matriz traspuesta de BC . (2 puntos)

a.3) CAB (2 puntos)

b) Resuelve la ecuación matricial

$$\frac{1}{5}(B + AX) = C^T,$$

siendo C^T la matriz traspuestas de C . (5 puntos)

Solución:

a) Para sumar o restar dos matrices, ambas deben ser del mismo orden. Para multiplicar dos matrices el número de columnas de la primera debe coincidir con el número de filas de la segunda.

a.1) $B + 2CA$

$C \cdot A$, el producto se puede efectuar y el resultado es una matriz 1×2 {filas de C x columnas de A }

$B + 2CA$, la operación no puede efectuarse.

a.2) $A - (BC)^T$

$B \cdot C$, el producto se puede efectuar y el resultado es una matriz 2×2 {filas de B x columnas de C }

$BC \rightarrow (BC)^T$; $A - (BC)^T$, la operación puede efectuarse.

$$BC = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ -12 & -12 \end{pmatrix} \rightarrow (BC)^T = \begin{pmatrix} 8 & -12 \\ 8 & -12 \end{pmatrix}$$

$$A - (BC)^T = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 & -12 \\ 8 & -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 12 \\ -6 & 16 \end{pmatrix}$$

Solución: $A - (BC)^T = \begin{pmatrix} -2 & 12 \\ -6 & 16 \end{pmatrix}$

a.3) CAB

$C \cdot A \cdot B$, el producto CA se puede efectuar y el resultado es una matriz 1×2 . $CA \cdot B$, este producto puede realizarse y el resultado es una matriz 1×1 . Por tanto, la operación CAB puede efectuarse.

$$CAB = (-2 \ -2) \cdot \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix} = \left[(-2 \ -2) \cdot \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix} = (-16 \ -8) \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix} = (16)$$

Solución: $CAB = (16)$

b) Resolver la ecuación matricial $\frac{1}{5}(B + AX) = C^T$

$$\frac{1}{5}(B + AX) = C^T; \quad B + AX = 5C^T; \quad AX = 5C^T - B$$

$$\text{Como } |A| = \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 24 \neq 0 \rightarrow \exists A^{-1}$$

Multiplicando la expresión $AX = 5C^T - B$ por A^{-1} por la izquierda,
 $A^{-1}AX = A^{-1}(5C^T - B) \rightarrow IX = A^{-1}(5C^T - B) \rightarrow X = A^{-1}(5C^T - B)$

Cálculo de A^{-1} ,

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \{\text{menores}\} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \{\text{adjuntos}\} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \{\text{traspuesta}\} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\text{Luego, } A^{-1} = \frac{1}{24} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/24 & 0 \\ -2/24 & 6/24 \end{pmatrix}$$

Continuemos con el cálculo de X ,

$$5C^T - B = 5 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ -10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -16 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}(5C^T - B) = \begin{pmatrix} 4/24 & 0 \\ -2/24 & 6/24 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ -16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -7/2 \end{pmatrix}$$

Solución: $X = \begin{pmatrix} -1 \\ -7/2 \end{pmatrix}$