

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 3. Se considera la función $f(x) = \frac{3x^2 - 4x - 4}{x^2 - x - 1}$. Se pide:

- Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados. (2 puntos)
- Las asíntotas horizontales y verticales, si existen. (2 puntos)
- Los intervalos de crecimiento y decrecimiento. (2 puntos)
- Los máximos y mínimos locales, si existen. (2 puntos)
- La representación gráfica de la función a partir de los resultados anteriores. (2 puntos)

Solución:

a) Dominio,

$$x^2 - x - 1 = 0 \rightarrow x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} = \begin{cases} x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1'62 \\ x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \approx -0'62 \end{cases}$$

$$\rightarrow \text{Dom } f(x) = \mathbb{R} - \left\{ \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right\}$$

Puntos de corte con los ejes coordenados,

$$x=0 \rightarrow f(0) = \frac{3 \cdot 0^2 - 4 \cdot 0 - 4}{0^2 - 0 - 1} = \frac{-4}{-1} = 4 \rightarrow (0, 4)$$

$$f(x)=0 \rightarrow \frac{3x^2 - 4x - 4}{x^2 - x - 1} = 0; \quad 3x^2 - 4x - 4 = 0 \rightarrow x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-4)}}{2 \cdot 3} = \frac{4 \pm 8}{6} =$$

$$= \begin{cases} x_1 = \frac{4+8}{6} = 2 & (2, 0) \\ x_2 = \frac{4-8}{6} = \frac{-2}{3} & \left(\frac{-2}{3}, 0 \right) \end{cases}$$

Los puntos de corte con los ejes coordenados son: $(0, 4)$, $\left(\frac{-2}{3}, 0\right)$ y $(2, 0)$.

b) *Asíntota horizontal y asíntota vertical.*

Asíntota horizontal,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 - 4x - 4}{x^2 - x - 1} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 3 = 3$$

, la asíntota horizontal es $y = 3$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 4x - 4}{x^2 - x - 1} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 3 = 3$$

Asíntotas verticales.

Del dominio de la función deducimos que hay dos posibles A.V. $x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ y $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1-\sqrt{5}}{2}} \frac{3x^2 - 4x - 4}{x^2 - x - 1} =$$

sustituir el valor de x en cada límite sería un cálculo largo y engorroso.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1+\sqrt{5}}{2}} \frac{3x^2 - 4x - 4}{x^2 - x - 1} =$$

Para estos valores de x sabemos que el denominador es cero (son las raíces del polinomio del denominador) y el numerador es distinto de cero (las raíces del numerador son 2 y $\frac{-2}{3}$). Por tanto

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1-\sqrt{5}}{2}} \frac{3x^2 - 4x - 4}{x^2 - x - 1} = \frac{\neq 0}{0} = \infty \rightarrow x = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \text{ es A.V.}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1+\sqrt{5}}{2}} \frac{3x^2 - 4x - 4}{x^2 - x - 1} = \frac{\neq 0}{0} = \infty \rightarrow x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ es A.V.}$$

La asíntota horizontal es $y = 3$ y las asíntotas verticales son $x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ y $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

c) Monotonía.

Estudiamos el signo de $f'(x)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(6x-4) \cdot (x^2-x-1) - (3x^2-4x-4) \cdot (2x-1)}{(x^2-x-1)^2} = \\ &= \frac{6x^3 - 6x^2 - 6x - 4x^2 + 4x + 4 - (6x^3 - 3x^2 - 8x^2 + 4x - 8x + 42)}{(x^2-x-1)^2} = \frac{6x^3 - 10x^2 - 2x + 4 - 6x^3 + 11x^2 + 4x - 4}{(x^2-x-1)^2} = \\ &= \frac{x^2 + 2x}{(x^2-x-1)^2} \end{aligned}$$

Obtengamos las raíces del numerador y denominador,

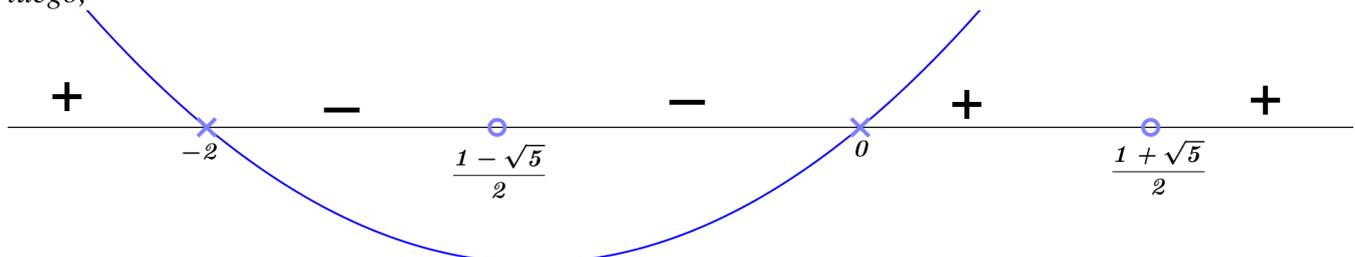
$$x^2 + 2x = 0 \rightarrow x(x+2) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x + 2 = 0; \quad x = -2 \end{cases}$$

$$(x^2 - x - 1)^2 = 0 \rightarrow x^2 - x - 1 = 0 \rightarrow \{\text{resuelta en a)}\} \quad x = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \quad \text{y} \quad x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Por tanto, debemos estudiar el signo de $f'(x)$ en los intervalos: $\left(\left\{ \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right\} \notin \text{Dom } f(x) \right)$



El denominador de $f'(x)$ está elevado al cuadrado, siempre será positivo. El signo de $f'(x)$ sólo depende del numerador que, gráficamente, es un polinomio de 2º grado con coeficiente de x^2 positivo y raíces -2 y 0 , luego,



Por tanto,

$f(x)$ es creciente en $(-\infty, -2) \cup \left(0, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right)$ y

$f(x)$ es decreciente en $\left(-2, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, 0\right)$

d) Máximos y mínimos locales.

Del estudio anterior deducimos que para $x = -2$ hay un máximo local y en $x = 0$ hay un mínimo local.

$$x = -2 \quad f(-2) = \frac{3 \cdot (-2)^2 - 4 \cdot (-2) - 4}{(-2)^2 - (-2) - 1} = \frac{16}{5} = 3.2 \rightarrow \text{Máximo local } \left(-2, \frac{16}{5}\right)$$

$$x = 0 \quad f(0) = 4 \text{ \{calculado en el apartado a)\} } \rightarrow \text{Mínimo local } (0, 4)$$

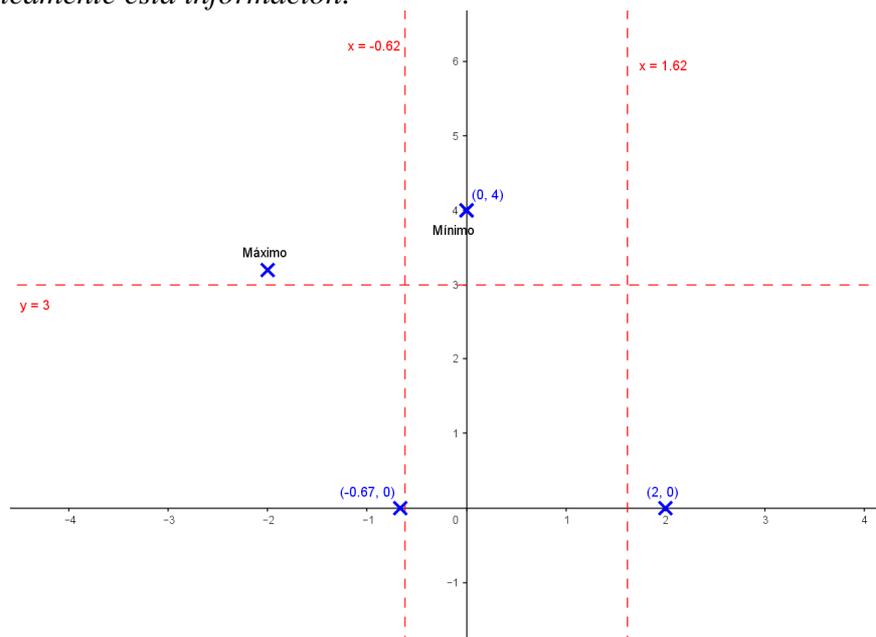
e) Representación gráfica.

De lo estudiado en los apartados anteriores sabemos:

Corte con ejes coordenados $(0, 4)$, $\left(\frac{-2}{3}, 0\right)$ y $(2, 0)$, mínimo local en $(0, 4)$, máximo local en

$\left(-2, \frac{16}{5}\right)$; a.h. $y = 3$, a.v. $x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ y $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Representando gráficamente esta información:



Si con esta información la representación no queda definida, podemos obtener la posición de la curva respecto de sus asíntotas.

A.H. $y = 3$

$$\text{En } -\infty, \quad x = -1000 \rightarrow y = \frac{3 \cdot (-1000)^2 - 4 \cdot (-1000) - 4}{(-1000)^2 - (-1000) - 1} = 3.00099\dots$$

$$\text{En } +\infty, \quad x = 1000 \rightarrow y = \frac{3 \cdot 1000^2 - 4 \cdot 1000 - 4}{1000^2 - 1000 - 1} = 2.998\dots$$



Considerando los intervalos de crecimiento y decrecimiento obtenidos, la representación gráfica de $f(x)$ es:

