Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II Julio 2022

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 4. Una máquina está productiva durante un año desde su compra. Se sabe que el rendimiento (en porcentaje) que tiene la máquina meses después de su compra viene dado por la función

$$f(x)=\frac{1}{10}\left(800+15x+6x^2-x^3\right)$$

para cualquier x entre 0 y 12.

a) ¿Es el rendimiento que tiene la máquina un mes después de su compra superior al rendimiento que tiene dos meses después de su compra? *(2 puntos)*

b) ¿Tras cuántos meses después de su compra alcanza la máquina su mayor rendimiento?; ¿cuál es dicho rendimiento máximo? *(4 puntos)*

c) A lo largo del año, ¿tiene en algún momento la máquina un rendimiento inferior al 10%? *(4 puntos)*

Solución:

$f(x)=\frac{1}{10}\left(800+15x+6x^2-x^3\right)$, *x meses después de compra ($0\le x\le 12$), f(x) rendimiento en porcentaje.*

a)

$$f(1)=\frac{1}{10}\left(800+15\cdot 1+6\cdot 1^2-1^3\right)=82$$

$$f(2)=\frac{1}{10}\left(800+15\cdot 2+6\cdot 2^2-2^3\right)=84'6$$

Por tanto, ***el rendimiento de la máquina un mes desùés de su compra (82%) no es superior al que tiene dos meses después (84´6%).***

b) Máximo.

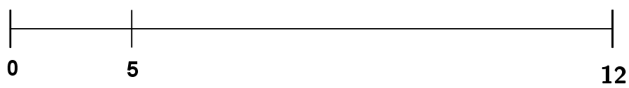
Debemos estudiar el signo de f´(t).

$$f(x)=\frac{1}{10}\left(800+15x+6x^2-x^3\right)\;\rightarrow\; f'(x)=\frac{1}{10}\left(15+12x-3x^2\right)$$

$$f'(x)=0;\quad \frac{1}{10}\left(15+12x-3x^2\right)=0;\quad 15+12x-3x^2=0;\quad 3x^2-12x-15=0;\quad x^2-4x-5=0$$

$$x=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot 3\cdot(-5)}}{2\cdot 1}=\frac{4\pm 6}{2}=\begin{cases} x_1=\dfrac{4+6}{2}=5 \\ x_2=\dfrac{4-6}{2}=-1\notin Dom\ f\end{cases}$$

Debemos estudiar el signo de f´(t) en los intervalos:



	$f'(x)=$
1	$\frac{1}{10}\left(15+12\cdot 1-3\cdot 1^2\right)=2'4>0$
6	$\frac{1}{10}\left(15+12\cdot 6-3\cdot 6^2\right)=-2'1<0$

Luego, en x = 5 hay un máximo local que es el absoluto ya que la función a su izquierda es creciente y a su derecha decreciente.

$$f(5)=\frac{1}{10}\left(800+15\cdot 5+6\cdot 5^2-5^3\right)=90$$

Solución: la máquina alcanza su mayor rendimiento 5 meses después de su compra y este rendimiento es del 90%.

c) *¿x? / f(x) < 10*

En el apartado anterior hemos obtenido que f(x) es creciente entre 0 y 5 y decreciente de 5 a 12.

$$f(0)=\frac{1}{10}\left(800+15\cdot 0+6\cdot 0^2-0^3\right)=80 \quad y \quad f(12)=\frac{1}{10}\left(800+15\cdot 12+6\cdot 12^2-12^3\right)=11'6$$

La función f(x) inicialmente vale 80 > 10, hasta x = 5 es creciente y después decreciente. Como f(12) es 11´6 > 10, la función nunca toma valores inferiores a 10.

Solución: la máquina nunca tiene un rendimiento inferior al 10%.