Problema 1. Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad B=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

se pide:

a) Calcular la matriz A^2 y su inversa *(5 puntos)*

b) Resolver la ecuación matricial $2\,A^2\,X = 4\,B$ *(2 puntos)*

Solución:

a) Cálculo de A^2.

$$A^2=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\cdot 1+1\cdot 0+0\cdot(-1) & 1\cdot 1+1\cdot 2+0\cdot 0 & 1\cdot 0+1\cdot(-2)+0\cdot 1 \\ 0\cdot 1+2\cdot 0+(-2)\cdot(-1) & 0\cdot 1+2\cdot 2+(-2)\cdot 0 & 0\cdot 0+2\cdot(-2)+(-2)\cdot 1 \\ -1\cdot 1+0\cdot 0+1\cdot(-1) & -1\cdot 1+0\cdot 2+1\cdot 0 & -1\cdot 0+0\cdot(-2)+1\cdot 1 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & -6 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculo de la inversa de A^2,

$$\left|A^2\right|=\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & -6 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix}=4+4+36-16-6-6=16\neq 0 \quad\rightarrow\quad \exists\left(A^2\right)^{-1}$$

$$A^2 \xrightarrow{\text{menores}} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 4 & -6 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -6 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -6 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & -10 & 6 \\ 1 & -3 & 5 \\ -10 & -2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{adjuntos}} \begin{pmatrix} -2 & 10 & 6 \\ -1 & -3 & -5 \\ -10 & 2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{traspuesta}}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & -10 \\ 10 & -3 & 2 \\ 6 & -5 & -2 \end{pmatrix}$$

Finalmente, $$\left(A^2\right)^{-1}=\frac{1}{16}\begin{pmatrix} -2 & -1 & -10 \\ 10 & -3 & 2 \\ 6 & -5 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{2}{16} & -\frac{1}{16} & -\frac{10}{16} \\ \frac{10}{16} & -\frac{3}{16} & \frac{2}{16} \\ \frac{6}{16} & -\frac{5}{16} & -\frac{2}{16} \end{pmatrix}$$

b) ¿Matriz X? / $2\,A^2\,X = 4\,B$

Despejemos X,

$$A^2X=\frac{4}{2}B; \quad A^2X=2B$$

Como existe $\left(A^2\right)^{-1}$*, multiplicando por la izquierda por* $\left(A^2\right)^{-1}$,

$$\left(A^2\right)^{-1}A^2X=\left(A^2\right)^{-1}2B; \quad como \quad \left(A^2\right)^{-1}A^2=I \quad\rightarrow\quad I\,X=2\left(A^2\right)^{-1}B; \quad X=2\left(A^2\right)^{-1}B$$

Procedamos al cálculo de X,

$$X = 2\,\frac{1}{16}\begin{pmatrix} -2 & -1 & -10 \\ 10 & -3 & 2 \\ 6 & -5 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{8}\begin{pmatrix} -2\cdot 3 + (-1)\cdot(-1) + (-10)\cdot 0 & -2\cdot(-2) + (-1)\cdot 4 + (-10)\cdot 0 & -2\cdot 1 + (-1)\cdot 2 + (-10)\cdot 1 \\ 10\cdot 3 + (-3)\cdot(-1) + 2\cdot 0 & 10\cdot(-2) + (-3)\cdot 4 + 2\cdot 0 & 10\cdot 1 + (-3)\cdot 2 + 2\cdot 1 \\ 6\cdot 3 + (-5)\cdot(-1) + (-2)\cdot 0 & 6\cdot(-2) + (-5)\cdot 4 + (-2)\cdot 0 & 6\cdot 1 + (-5)\cdot 2 + (-2)\cdot 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{8}\begin{pmatrix} -6+1 & 4-4 & -2-2-10 \\ 30+3 & -20-12 & 10-6+2 \\ 18+5 & -12-20 & 6-10-2 \end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} -5 & 0 & -14 \\ 33 & -32 & 6 \\ 23 & -32 & -6 \end{pmatrix}$$

Solución: $$X = \begin{pmatrix} -5/8 & 0 & -7/4 \\ 33/8 & -4 & 3/4 \\ 23/8 & -4 & -3/4 \end{pmatrix}$$