Problema 3. Se considera la función $f(x)=\dfrac{4x-5}{2\left(x^2-1\right)}$. Se pide:

a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados. *(2 puntos)*
b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen. *(2 puntos)*
c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento. *(2 puntos)*
d) Los máximos y mínimos locales, si existen. *(2 puntos)*
e) La representación gráfica de la función a partir de los resultados anteriores. *(2 puntos)*

Solución:
a) Dominio,

$$2\left(x^2-1\right)=0 \quad \rightarrow \quad x^2-1=0 \quad \rightarrow \quad x^2=1 \quad \rightarrow \quad x=\pm\sqrt{1}=\pm 1 \quad \rightarrow \quad Dom\ \ f(x)=\Re-\{-1\,,1\}$$

Puntos de corte con los ejes coordenados,

$$x=0 \quad \rightarrow \quad f(0)=\frac{4\cdot 0-5}{2\left(0^2-1\right)}=\frac{-5}{-2}=\frac{5}{2} \quad \rightarrow \quad \left(0\,,\frac{5}{2}\right)$$

$$f(x)=0 \quad \rightarrow \quad \frac{4x-5}{2\left(x^2-1\right)}=0;\quad 4x-5=0;\quad 4x=5;\quad x=\frac{5}{4} \quad \rightarrow \quad \left(\frac{5}{4},0\right)$$

Su dominio es $Dom\ f(x)=\Re-\{-1\,,1\}$ ***y sus puntos de corte con los ejes coordenados son:*** $\left(0\,,\frac{5}{2}\right)$ *y* $\left(\frac{5}{4},0\right)$**.**

b) Asíntota horizontal y asíntota vertical.
Asíntota horizontal,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{4x-5}{2\left(x^2-1\right)}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{4x}{2x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{4}{2x}=\frac{4}{-\infty}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x-5}{2\left(x^2-1\right)}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x}{2x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4}{2x}=\frac{4}{+\infty}=0$$

, *la asíntota horizontal es y =0.*

Asíntotas verticales.
Del dominio de la función deducimos que hay dos posibles a.v. $x=-1$ *y* $x=1$.

$$\lim_{x\to-1} f(x)=\lim_{x\to-1}\frac{4x-5}{2\left(x^2-1\right)}=\frac{4(-1)-5}{2\left((-1)^2-1\right)}=\frac{-9}{0}=\infty \quad \rightarrow \quad x=-1 \quad es\ a.v.$$

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{4x-5}{2\left(x^2-1\right)}=\frac{4\cdot 1-5}{2\left(1^2-1\right)}=\frac{-1}{0}=\infty \quad \rightarrow \quad x=1 \quad es\ a.v.$$

La asíntota horizontal es y = 0 y las asíntotas verticales son $x=-1$ *y* $x=1$**.**

c) Monotonía.
Estudiemos el signo de $f'(x)$

$$f'(x)=\frac{4\cdot 2\left(x^2-1\right)-(4x-5)\cdot 2\cdot 2x}{\left(2\left(x^2-1\right)\right)^2}=\frac{8x^2-8-16x^2+20x}{4\left(x^2-1\right)^2}=\frac{-8x^2+20x-8}{4\left(x^2-1\right)^2}=\frac{-2x^2+5x-2}{\left(x^2-1\right)^2}$$

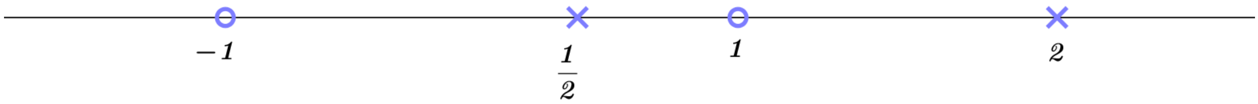
Obtengamos las raíces del numerador y denominador,

$$-2x^2+5x-2=0 \quad \rightarrow \quad x=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4\cdot(-2)\cdot(-2)}}{2\cdot(-2)}=\frac{-5\pm\sqrt{25-16}}{-4}=\frac{-5\pm\sqrt{9}}{-4}=\frac{-5\pm 3}{-4}=$$

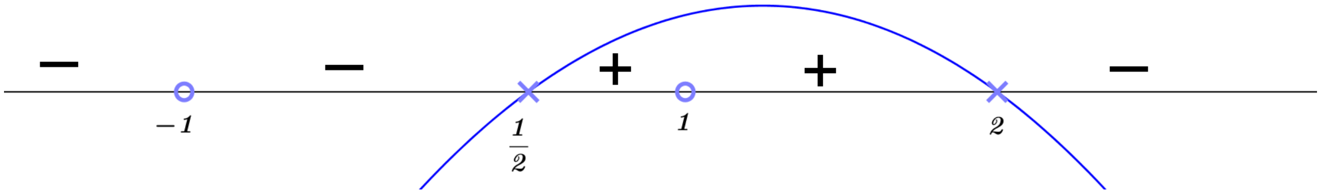
$$=\left\langle \begin{array}{l} x_1=\dfrac{-5+3}{-4}=\dfrac{-2}{-4}=\dfrac{1}{2} \\ x_2=\dfrac{-5-3}{-4}=\dfrac{-8}{-4}=2 \end{array}\right.$$

$$\left(x^2-1\right)^2=0 \quad \rightarrow \quad x^2-1=0 \quad \rightarrow \quad \{resuelta\ en\ a)\} \quad x=-1 \quad y \quad x=1$$

Por tanto, debemos estudiar el signo de $f'(x)$ *en los intervalos:* $(\{-1,1\}\notin Dom\ f(x))$



El denominador de f´(x) está elevado al cuadrado, siempre será positivo. El signo de f´(x) sólo depende del numerador que, gráficamente, es un polinomio de 2º grado con coeficiente de x^2 *negativo y raíces 1/2 y 2, luego,*



Por tanto,

f(x) es creciente en $\left(\frac{1}{2},1\right)\cup(1,2)$ ***y***

f(x) es decreciente en $(-\infty,-1)\cup\left(-1,\frac{1}{2}\right)\cup(2,+\infty)$**.**

d) Máximos y mínimos locales.

Del estudio anterior deducimos que en $x=\frac{1}{2}$ *hay un mínimo local y en* $x = 2$ *hay un máximo local.*

$$x=\frac{1}{2} \quad f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{4\frac{1}{2}-5}{2\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2-1\right)}=\frac{-3}{2\left(\frac{1}{4}-1\right)}=\frac{-3}{2\left(\frac{-3}{4}\right)}=\frac{-3}{\frac{-3}{2}}=2 \quad \rightarrow \quad Mínimo\ local \quad \left(\frac{1}{2},2\right)$$

$$x=2 \quad f(2)=\frac{4\cdot 2-5}{2\left(2^2-1\right)}=\frac{3}{2\cdot 3}=\frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad Máximo\ local \quad \left(2,\frac{1}{2}\right)$$

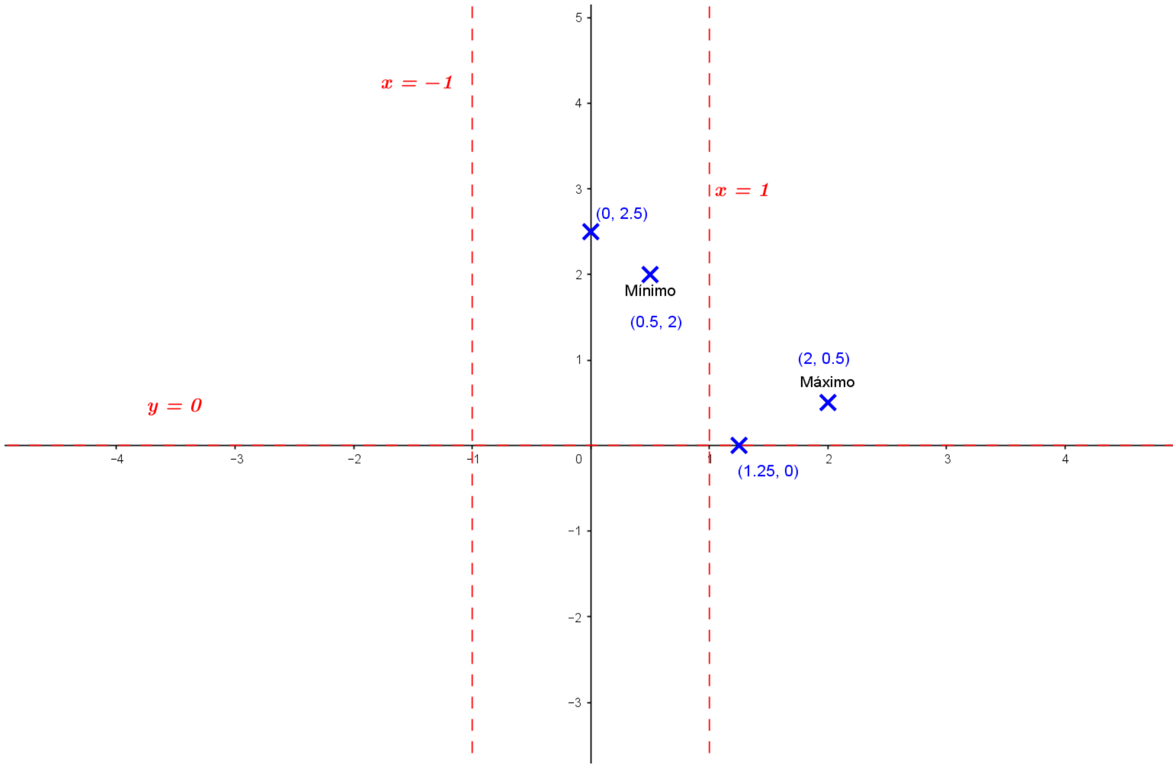
e) Representación gráfica.

De lo estudiado en los apartados anteriores sabemos:

Corte con ejes coordenados $\left(0\,,\dfrac{5}{2}\right)$ *y* $\left(\dfrac{5}{4},0\right)$, *mínimo local en* $\left(\dfrac{1}{2},2\right)$, *máximo local en* $\left(2,\dfrac{1}{2}\right)$;

a.h. $y = 0$, *a.v.* $x = -1$ *y* $x = 1$.

Representando gráficamente esta información:

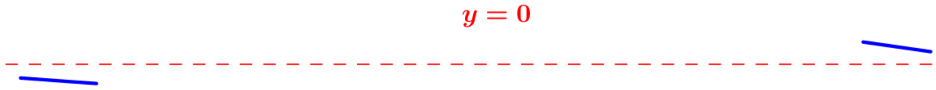


Si con esta información la representación no queda definida, podemos obtener:

la posición de la curva respecto de su asíntota horizontal $y = 0$

$$En\,-\infty,\quad x=-1000 \quad\rightarrow\quad y=\frac{4\cdot(-1000)-5}{2\left((-1000)^2-1\right)}=-0'002\ldots<0$$

$$En\,+\infty,\quad x=1000 \quad\rightarrow\quad y=\frac{4\cdot 1000-5}{2\left(1000^2-1\right)}=0'0019\ldots>0$$



La posición de la curva respecto de su asíntota vertical $x = -1$

$$\lim_{x\to -1^-}\frac{4x-5}{2\left(x^2-1\right)}\overset{x=-1'1}{=}\frac{4(-1'1)-5}{2\left((-1'1)^2-1\right)}\infty=\frac{-}{+}\infty=-\infty$$

$$\lim_{x\to -1^+}\frac{4x-5}{2\left(x^2-1\right)}\overset{x=-0'9}{=}\frac{4(-0'9)-5}{2\left((-0'9)^2-1\right)}\infty=\frac{-}{-}\infty=+\infty$$

Considerando los intervalos de crecimiento y decrecimiento obtenidos, la representación gráfica de f(x) es: