Problema 4. El consumo de energía (en Mwh) en una empresa metalúrgica a las x horas de un día viene dado por la siguiente función:

$$f(x)=\begin{cases}2x+14 & si\ x\in[0,6]\\ -x^2+24x-82 & si\ x\in]6,18]\\ -x+34 & si\ x\in]18,24]\end{cases}$$

a) Estudia la continuidad de esta función en el intervalo [0,24]. *(3 puntos)*
b) Determina a qué horas del día el consumo alcanza sus valores máximo y mínimo. ¿Cuáles son dichos valores? *(4 puntos)*
c) Planteando la integral adecuada, calcula el consumo que se realiza entre las 8 de la mañana y las 10 de la mañana. (3 *puntos)*

Solución:

a) Continuidad de esta función en el intervalo [0,24].

Como cada una de las definiciones de f(x) es un polinomio de 1er o 2º grado, son continuas en sus correspondientes intervalos. Los problemas para la continuidad de la función están en los cambios de definición.

Continuidad en x = 6,

a) $f(6) = 2 \cdot 6 + 14 = 26$

b) $$\lim_{x\to 6} f(x)=\left\{\begin{array}{l}\lim_{x\to 6^-} f(x)=\lim_{x\to 6^-}(2x+4)=26\\ \lim_{x\to 6^+} f(x)=\lim_{x\to 6^+}\left(-x^2+24x-82\right)=-6^2+24\cdot 6-82=26\end{array}\right\}=26$$

c) $f(6) = 26 = \lim_{x\to 6} f(x)$

Por tanto f(x) es continua en x = 6.

Continuidad en x = 18,

d) $f(18) = -18^2 + 24 \cdot 18 - 82 = 26$

e) $$\lim_{x\to 18} f(x)=\left\{\begin{array}{l}\lim_{x\to 18^-} f(x)=\lim_{x\to 18^-}\left(-x^2+24x-82\right)=26\\ \lim_{x\to 18^+} f(x)=\lim_{x\to 18^+}(-x+34)=-18+34=16\end{array}\right\}\neq \quad \rightarrow \quad \text{no existe} \quad \lim_{x\to 18} f(x)$$

Por tanto f(x) no es continua en x =18

Solución: f(x) es continua en [0 , 24] ~{18}.

b) ¿A qué horas del día el consumo alcanza sus valores máximo y mínimo?

Representemos gráficamente la función (algunos cálculos están realizados en el apartado a))

x	$2x+14$
0	14
6	26

x	$-x^2+24x-82$
6	26
18	26

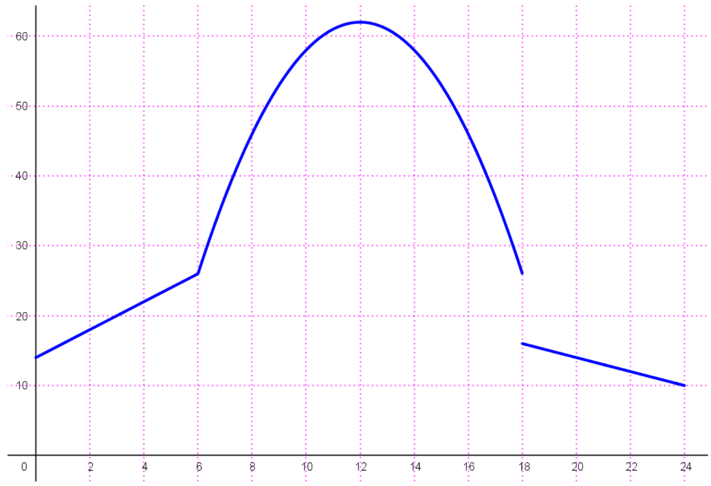
x	$-x+34$
18	16
24	10

Para completar la representación de la parábola necesitamos algún punto más. Como el polinomio de 2º grado tiene coeficiente de x^2 negativo, la parábola tiene la forma $\cap$, obtengamos el máximo.

$$g(x)=-x^2+24x-82$$

$$g'(x)=-2x+24;\quad -2x+24=0;\quad -2x=-24;\quad x=\frac{-24}{-2}=12\in(6,18)$$

$$g(12)=-12^2+24\cdot 12-82=62 \qquad \rightarrow \qquad \text{máximo de la parábola} \quad (12,62)$$



Solución: el consumo máximo se alcanza a las 12h y es de 62 Mwh y el consumo mínimo se alcanza a las 24h y es de 10 Mwh.

c) Planteando la integral adecuada, calcula el consumo que se realiza entre las 8 de la mañana y las 10 de la mañana.

Entre las 8 y las diez de la mañana la definición de f(x) es $-x^2 + 24x - 82$.

El consumo que se realiza entre esas horas lo obtendremos mediante la siguiente integral definida,

$$\int_8^{10} \left(-x^2 + 24x - 82\right)dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 24\frac{x^2}{2} - 82x\right]_8^{10} = \left[-\frac{x^3}{3} + 12x^2 - 82x\right]_8^{10} =$$

$$= \left(-\frac{10^3}{3} + 12\cdot 10^2 - 82\cdot 10\right) - \left(-\frac{8^3}{3} + 12\cdot 8^2 - 82\cdot 8\right) = \frac{140}{3} - \left(-\frac{176}{3}\right) = \frac{316}{3} \cong 105'3333$$

El consumo que se realiza entre las 8 de la mañana y las 10 de la mañana es de $\frac{316}{3}$ ***Mwh.***