EJERCICIO A

PROBLEMA 3. La velocidad (en m./seg.) que alcanza cierto atleta en una carrera de 200 metros viene dada en función del espacio recorrido, x, por la siguiente expresión: f(x) = – 0´00055 x (x – 300)
Deducir de forma razonada:

a) ¿Qué distancia ha recorrido el atleta cuando alcanza su velocidad máxima? ¿Cuál es ésta velocidad?
b) ¿Entre qué distancias su velocidad va aumentando? ¿Y disminuyendo?
c) ¿A qué velocidad llega a la meta?

Solución:

$f(x) = -0'00055\,x\,(x-300) = -0'00055\,x^2 + 0'165\,x$

f(x) mide la velocidad en función del espacio recorrido, como la carrera es de 200 m Dom f = [0 , 200]
La representación gráfica de f(x) es una parábola. Esta representación es fácil de obtener y nos será útil para responder a las preguntas.

Puntos de corte con los ejes coordenados

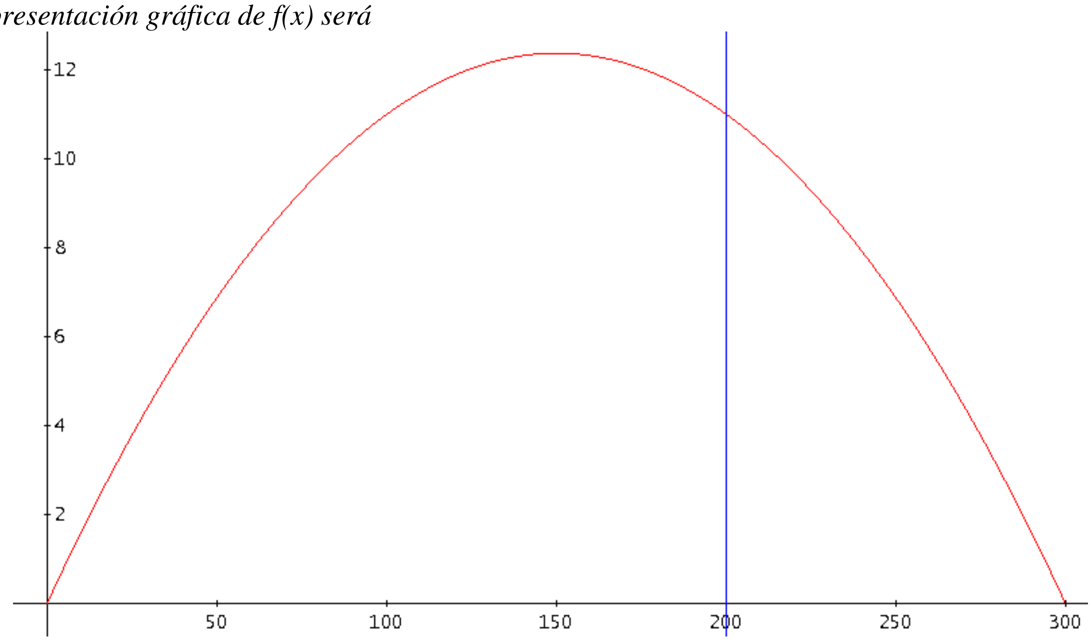
$x = 0 \rightarrow f(x) = -0'00055 \cdot 0^2 + 0'165 \cdot 0 = 0 \rightarrow (0, 0)$

$$f(x)=0 \quad\rightarrow\quad 0'00055\,x\,(x-300)=0 \quad\rightarrow\quad \begin{cases} x=0 & \rightarrow \quad (0,0) \\ x-300=0 \quad\rightarrow\quad x=300 & \rightarrow \quad (300,0) \end{cases}$$

Vértice

$$x=\frac{-b}{2a}=\frac{-0'165}{2(-0'00055)}=150 \quad\rightarrow\quad y=-0'00055 \cdot 150\,(150-300)=12'375 \quad\rightarrow\quad (150\,,\,12'375)$$

La representación gráfica de f(x) será



a) ¿velocidad máxima?

$f'(x) = -0'0011\,x + 0'165$

$$-0'0011\,x + 0'165 = 0 \quad\rightarrow\quad x=\frac{-0'165}{-0'0011}=150$$

f''(x) = – 0'0011 luego f''(150) = – 0'0011, es decir, en x = 150 hay un máximo relativo.
Como f(x) es, gráficamente, una parábola "hacia abajo" y 150 está en el dominio de f(x) este máximo relativo que hemos obtenido es el máximo absoluto de f(x). Según los cálculos previos f(150) = 12'375.

El atleta alcanza su velocidad máxima, 12'375 m/s, cuando ha recorrido 150 m.

b) Podemos responder a esta pregunta de dos formas.

1) Considerando la representación gráfica realizada al principio, obtenemos que ***la velocidad va aumentando entre 0 m. y 150 m y disminuye entre 150 m. y 200 m.***

2) Estudiando la monotonía de la función f(x)
Sabemos que Dom f = [0 , 200]
Por lo calculado en el apartado a) $f'(x) = 0$ para $x = 150$
Debemos estudiar el signo de $f'(x)$ en los intervalos (0, 150) y (150 , 200)

intervalo	*valor de x*	$f'(x) = -0'0011\,x + 0'165$	
(0, 150)	*100*	$f'(x) = -0'0011 \cdot 100 + 0'165 = -0'11 + 0'165 = 0'055 > 0$	*creciente*
(150 , 200)	*180*	$f'(x) = -0'0011 \cdot 180 + 0'165 = -0'11 + 0'165 = -0'033 < 0$	*decreciente*

Obtenemos que la velocidad va aumentando entre 0 m. y 150 m y disminuye entre 150 m. y 200 m.

c)
Como la meta está a 200 m. para saber la velocidad a la que llega basta con calcular f(200)
$f(200) = -0'00055 \cdot 200\,(200 - 300) = 11$

El corredor llega a la meta a 11 m/s