Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II   Junio 2005

EJERCICIO A

PROBLEMA 3. Se estima que los beneficios mensuales de una fábrica de golosinas, en miles de euros, vienen dados por la función $f(x) = -0{,}1x^2 + 2{,}5x - 10$, cuando se venden x toneladas de producto. Se pide:

a) Calcular la cantidad de toneladas que se ha de vender para obtener el beneficio máximo y calcular éste. Justificar que es máximo.
b) La cantidad mínima que se ha de vender para no tener pérdidas.
c) ¿Qué cantidad produce el máximo beneficio por tonelada vendida? Calcular el máximo beneficio y justificar que es máximo.

Solución:

a) Calculemos el dominio de la función f(x). Esta función da los beneficios dependiendo de las toneladas de producto vendidas, luego el dominio de f(x) serán los valores de x tales que f(x) ≥ 0.

Resolvamos la inecuación $-0{,}1x^2 + 2{,}5x - 10 \geq 0$*, para ello resolvemos la ecuación,*

$$-0{,}1x^2 + 2{,}5x - 10 = 0 \qquad x = \frac{-2'5 \pm \sqrt{2'5^2 - 4(-0'1)(-10)}}{2(-0'1)} = \frac{-2'5 \pm \sqrt{6'25 - 4}}{-0'2} = \frac{-2'5 \pm \sqrt{2'25}}{-0'2} =$$

$$= \frac{-2'5 \pm 1'5}{-0'2} = \begin{cases} x_1 = \dfrac{-2'5 + 1'5}{-0'2} = \dfrac{-1}{-0'2} = 5 \\ x_2 = \dfrac{-2'5 - 1'5}{-0'2} = \dfrac{-4}{-0'2} = 20 \end{cases}$$

Como f(x) es un polinomio de 2º grado con coeficiente de x^2 negativo la solución de f(x) ≥ 0 es el intervalo [5 , 20]. Por tanto Dom f(x) = [5 , 20]

El máximo relativo de f(x) se alcanza en su vértice $x = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-2'5}{2(-0'1)} = 12'5$

Como 12´5 Є [5 , 20] el máximo relativo es máximo absoluto de f(x).

Para x = 12´5, f(x) = – 0´1 . 12´5^2 + 2´5 . 12´5 – 10 = 5´625

Para obtener un beneficio máximo hay que vender 12´5 toneladas del producto y el beneficio será de 5625 €.

b) La cantidad mínima que se ha de vender para no tener pérdidas es 5 toneladas, según obtuvimos en el apartado anterior al calcular el dominio de f(x).

c) El beneficio por tonelada vendida viene dado por la función

$$y = \frac{-0'1x^2 + 2'5x - 10}{x} \qquad x \in [5, 20]$$

Calculemos el máximo de esta función,

$$y' = \frac{(-0'2x + 2'5)x - (-0'1x^2 + 2'5x - 10)}{x^2} = \frac{-0'2x^2 + 2'5x + 0'1x^2 - 2'5x + 10}{x^2} = \frac{-0'1x^2 + 10}{x^2}$$

Estudiemos la monotonía de y,

$$-0'1x^2 + 10 = 0 \;\rightarrow\; 0'1x^2 = 10 \;\rightarrow\; x^2 = 100 \;\rightarrow\; x = \pm 10$$

$$x^2 = 0 \;\rightarrow\; x = 0$$

calculemos el signo de y´ en los siguientes intervalos,

intervalo	x	y'
$(-\infty,-10)$	-20	$\dfrac{-0'1(-20)^2+10}{(-20)^2} = \dfrac{-40+10}{200} =$ *negativo*
$(-10,0)$	-5	$\dfrac{-0'1(-5)^2+10}{(-5)^2} = \dfrac{-2'5+10}{25} =$ *positivo*
$(0,10)$	5	$\dfrac{-0'1(5)^2+10}{(5)^2} = \dfrac{-2'5+10}{25} =$ *positivo*
$(10,+\infty)$	20	$\dfrac{-0'1(20)^2+10}{(20)^2} = \dfrac{-40+10}{200} =$ *negativo*

Como el dominio de la función y es el intervalo [5 , 20], el estudio anterior nos dice que la función y es creciente en (5 , 10) y decreciente en (10 , 20), luego en x = 10 hay un máximo relativo.

Para x = 10 $y = \dfrac{-0{\acute{}}1.10^2 + 2{\acute{}}5.10 - 10}{10} = \dfrac{-10 + 25 - 10}{10} = \dfrac{5}{10} = 0{\acute{}}5$

Este máximo relativo es máximo absoluto por que y(5)=0 e y(20)=0 (para estos valores de x el numerador de y es 0, obtenido en el primer apartado) e y(10)=0´5.

La cantidad que produce el máximo beneficio por tonelada vendida es 10 toneladas, el beneficio será (10.0´5 = 5 miles de €) 5000 €.