EJERCICIO B

PROBLEMA 1. Sea $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ la matriz de los coeficientes de un sistema de ecuaciones lineales y $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ la matriz de sus términos independientes. Se pide:

a) Escribir las tres ecuaciones que forman el sistema.
b) Obtener todas las soluciones del sistema.

Solución:

La expresión matricial del sistema es: $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

a) Las tres ecuaciones que forman el sistema son

$$\begin{cases} 2x + 2y + z = 1 \\ 2x + 3y + z = 1 \\ 2x + 5y + z = 1 \end{cases}$$

b) Para encontrar las soluciones del sistema, estudiamos los rangos de la matriz de coeficientes (A) y de la ampliada (A´),

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = (como\ C_1 = 2C_3) = 0 \quad \to \quad ran(A) \leq 2$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 4 = 2 \neq 0 \quad \to \quad ran(A) = 2$$

Orlamos el menor de orden 2 usando la columna de términos independientes de A´,

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = (como\ C_1 = 2C_3) = 0 \quad \to \quad ran(A') \leq 2$$ *pero como ran(A)=2, entonces ran(A´)=2*

Por lo tanto hemos obtenido que ran(A) = ran(A´) = 2 < nº incógnitas (3), es un sistema compatible indeterminado. Para obtener las soluciones usaremos las ecuaciones e incógnitas correspondientes al menor de orden 2 no nulo, es decir

$$\begin{cases} 2x + 2y = 1 - z \\ 2x + 3y = 1 - z \end{cases}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1-z & 2 \\ 1-z & 3 \end{vmatrix}}{2} = \frac{3 - 3z - 2 + 2z}{2} = \frac{1-z}{2}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1-z \\ 2 & 1-z \end{vmatrix}}{2} = \frac{2(1-z) - 2(1-z)}{2} = \frac{0}{2} = 0$$

La solución del sistema es:

$$\begin{cases} x = \dfrac{1-\lambda}{2} \\ y = 0 \qquad \lambda \in \Re \\ z = \lambda \end{cases}$$